2011年西部数学奥林匹克

1. 已知$0<x,y<1$，求$\dfrac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$的最大值．

2. 设集合$M\subseteq\{1,2,\cdots,2011\}$，满足：在$M$的任意三个元素中，总可以找到两个元素$a,b$，使得$a|b$或$b|a$．求$|M|$的最大值(其中$|M|$表示集合$M$中元素的个数)．

3. 给定正整数$n\geq 2$，
   (α) 求证：可以将集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有子集适当地排列为$A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$，使得A_n与A_{n+1}的元素个数恰相差1，其中$n=1,2,\cdots,2^n$且$A_{2^n+1}=A_1$．
   (β) 对于满足(α)中条件的子集$A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$，求$\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n}(-1)^iS(A_i)$的所有可能值，其中$S(A_i)=\displaystyle\sum_{x\in A_i}x$，$S(\varnothing)=0$．

4. 如图，线段AB、CD是圆O中长度不相等的两条弦，AB与CD的交点为E，$\odot I$内切$\odot O$于点F，且分别与弦AB、CD相切于点G、H．过点O的直线l分别交AB、CD于点P、Q，使得$EP=EQ$．直线EF与直线l交于点M．求证：过点M且与AB平行的直线是$\odot O$的切线．

5. 是否存在奇数$n\geq 3$及n个互不相同的质数$p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得$p_i+p_{i+1}(i=1,2,\cdots,n$，其中$p_{n+1}=p_1)$都是完全平方数？请证明你的结论．

6. 设$a,b,c>0$，求证：
$$\frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)}+\frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)}\geq\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

7. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，内切圆$\odot I$与边BC、CA、AB分别相切于点D、E、F，M是边BC的中点，AH垂直BC于点H．$\angle BAC$的平分线AI分别与直线DE、DF交于点K、L．求证：M、L、H、K四点共圆．

8. 求所有的整数对(a,b)，使得对任意正整数n，都有$n|a^n+b^{n+1}$．