2011年第八届东南数学奥林匹克

第一天 2011 年 7 月 27 日 8:00——12:00

1. (卢兴江供题)已知$\min\limits_{x\in\mathbb{R}}\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^2}}=3$．(1)求$b$的取值范围．(2)对给定的$b$，求$a$．

2. (杨晓鸣供题)已知正整数a,b,c两两互质，且

$$a^2|(b^3+c^3), b^2|(c^3+a^3), c^2|(a^3+b^3),$$

求a,b,c的值．

3. (李胜宏供题)求所有正整数n，使得集$M=\{1,2,\cdots,50\}$的任意一个35元子集，至少存在两个不同元素a,b，使满足$a+b=n$或$a-b=n$．

4. (陶平生供题)过$\triangle ABC$的外心O任作一直线MN交AB于M，交AC于N．若E，F分别是BN,CM的中点，求证：$\angle A=\angle EOF$．

第二天 2011 年 7 月 28 日 8:00——12:00

5. (陶平生供题)在$\triangle ABC$中，AA_0,BB_0,CC_0是其三条角平分线，分别交BC，CA，AB于A_0,B_0,C_0．自A_0作$AA_1//BB_0$，$AA_2//CC_0$，A_1,A_2分别在AC,AB上,设A_1A_2交BC于点A_3，类似得到B_3,C_3．求证：A_3,B_3,C_3三点共线．

6. (金蒙伟供题)设$P_i(i=1,2,\cdots,n)$为平面上n个点，M为平面内线段AB上任意一点，记$|AB|$为平面上A,B两点之间的距离．求证：

$$\sum_{i=1}^{n}|P_iM|\le\max\left\{\sum_{i=1}^{n}|P_iA|,\sum_{i=1}^{n}|P_iB|\right\}.$$

7. (陶平生供题)设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=a_2=1,a_n=7a_{n-1}-a_{n-2}(n\ge 3)$．证明：$\forall n\in\mathbb{N}^+$，$a_n+2+a_{n+1}$都是完全平方数．

8. (陶平生供题)把时钟盘上的标号为$1,2,\cdots,12$的12个点染上红、黄、蓝、绿四色，每色三个点，现在以这些点为顶点构作n为凸四边形，使得它们满足：(1)每个凸四边形四个顶点颜色各不相同．(2)对其中任意三个四边形，都存在某一种颜色，使得染有该颜色的三个点所标记的数字互不相同．试求n最大值．