2011年第二届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

第一天 2011年7月23日 8:00——12:00

1. 锐角三角形ABC,BC边上的高与以BC为直径的圆交于D,E;AC边上的高与以AC为直径的圆交于M,N.求证:D,E,M,N四点共圆,并确定圆心位置.

2. 设$d(n)$表示正整数n的正因子的个数,$a_{n+1}=d\left(\left[\frac{3a_n}{2}\right]\right)+2011$,证明对任意正整数$a_1$,$\{a_n\}$自某项后为周期数列.

3. 求所有满足下述条件的质数P:$\{\sqrt{P}\}=x$,$\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{\sqrt{p}-31}{75}$.

4. $n\times n$的棋盘($n>2$)里面有一个空格和n^2-1个棋子,棋子编号为$1,2,\cdots,n^2-1$,每次操作可将空格旁相邻的棋子移到空格位.问:是否棋子最初任意摆放都能经过有限次操作使棋子按编号从左到右,从上到下顺序排列.

第二天 2011年7月24日 8:00——12:00

5. 锐角三角形ABC外心为O,AO交BC于D,BO交AC于E,CO交AB于F,$\triangle ABC\sim\triangle DEF$,求证:$\triangle ABC$为等边三角形.

6. 已知x,y,z均为实数,求证:
$$-\frac{x^2+y^2+2z^2}{2}\le 3xy+yz+zx\le\frac{(x^2+y^2+2z^2)(3+\sqrt{13})}{4}.$$

7. 证明不超过9000的任意九个不同正整数中总可以找出四个A,B,C,D使$3+D<A+B+C<4D+1$.

8. 一个密码设置为$1,2,3,\cdots,64$的一个排列,每次输入八个数字,它会告诉你这八个数字在原密码中的先后顺序.试找到一种方法,使输入8个数字的次数不超过45,就已确定原密码.