# 第二届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)09-0028-05

## 第一天

**1.** (50分)已知锐角△$ABC$，过点$A$作$BC$的垂线与以$BC$为直径的⊙$O_1$分别交于点$D$、$E$；过点$B$作$CA$的垂线与以$CA$为直径的⊙$O_2$分别交于点$F$、$G$. 证明：$E$、$F$、$D$、$G$四点共圆，并确定圆心的位置.

**2.** (50分)记$d(n)$为正整数$n$的正因子的个数，定义数列$\{a_n\}$如下：

$$a_1=A, a_{n+1}=d\left(\left[\frac{3}{2}a_n\right]\right)+2\,011,$$

其中，$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数.

证明：对于任意的正整数$A$，数列$\{a_n\}$自某项开始为周期数列.

**3.** (50分)已知$p$为质数，$\sqrt{p}$的小数部分为$x$，$\frac{1}{x}$的小数部分为$\frac{\sqrt{p}-31}{75}$. 求所有满足条件的质数$p$的值.

**4.** (50分)在一个$n$行$n$列的棋盘上放置$n^2-1$($n\geqslant3$)枚棋子. 棋子的编号为

$$(1,1),\cdots,(1,n),(2,1),\cdots,(2,n),$$
$$\cdots,(n,1),\cdots,(n,n-1).$$

如果编号为$(i,j)$的棋子刚好在棋盘的第$i$行第$j$列，即第$n$行第$n$列是空的，则称棋盘处于"标准状态".

现把$n^2-1$枚棋子随意地放到棋盘上，每个格子只能放置一枚棋子，每一步可以把空格相邻的一个格子中的棋子移到空格中(两格子相邻是指其有公共边). 问：是否在任意放置下，都可以经过有限次移动，使棋盘达到标准状态？证明你的结论.

## 第二天

**5.** (50分)设$O$为锐角△$ABC$的外心，$AO$、$BO$、$CO$的延长线分别与$BC$、$CA$、$AB$交于点$D$、$E$、$F$. 若△$ABC$∽△$DEF$，证明：△$ABC$是正三角形.

**6.** (50分)对任意$x$、$y$、$z\in\mathbf{R}$，证明：

$$-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2z^2)\leqslant3xy+yz+zx$$
$$\leqslant\frac{3+\sqrt{13}}{4}(x^2+y^2+2z^2).$$

**7.** (50分)任意九个两两不同的不超过9 000的正整数中一定存在四个数$a$、$b$、$c$、$d$，使得

$$4+d\leqslant a+b+c\leqslant4d.$$

**8.** (50分)某位科学家将其时间机器设计图存入一台电脑，文件打开密码设置为$\{1,2,\cdots,64\}$的某个排列. 又设计了一个程序，当每次输入1~64中的八个正整数时，电脑会提示这八个数之间在密码中的顺序(从左至右). 请设计一种操作方案，使得至多经过45次输入，就能确定这个密码.

## 参考答案

### 第一天

**1. 证法1** 如图1，设$AE$与$BC$、$BG$与$CA$、$AE$与$BG$分别交于点$A_1$、$B_1$、$H$. 则$H$是△$ABC$的垂心，点$A_1$、$B_1$分别在⊙$O_2$、⊙$O_1$上.

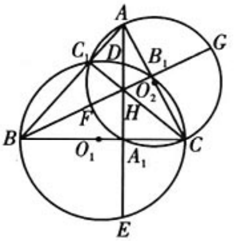

图1

因为$BC$、$CA$

分别为 $DE$、$FG$ 的中垂线,所以,

$CD=CE, CF=CG$.

注意到 $\angle BEC=\angle AGC=90°$.

由射影定理得

$CE^2=CB\cdot CA_1, CG^2=CA\cdot CB_1$.

又因为 $A$、$B$、$A_1$、$B_1$ 四点共圆,所以,

$CA\cdot CB_1=CB\cdot CA_1$.

从而,$CD=CE=CG=CF$,即 $E$、$F$、$D$、$G$ 四点共圆,且圆心为 $C$.

**证法 2** 如图 1,设 $AE$ 与 $BG$ 交于点 $H$. 则 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

延长 $CH$ 与 $AB$ 交于点 $C_1$.

由相交弦定理得

$DH\cdot HE=CH\cdot HC_1=FH\cdot HG$.

因此,$E$、$F$、$D$、$G$ 四点共圆.

因为 $BC$、$CA$ 分别为 $DE$、$FG$ 的中垂线,所以,$BC$、$CA$ 的交点 $C$ 就是过点 $E$、$F$、$D$、$G$ 的圆的圆心.

**2.** 对于正整数 $n$,易知

$$n-1, n-2, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]+1$$

这 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个数不可能是 $n$ 的正因子,即

$$d(n)\leqslant n-\left[\frac{n-1}{2}\right]\leqslant\frac{n}{2}+1.$$

则 $$a_{n+1}\leqslant\frac{\left[\frac{3}{2}a_n\right]}{2}+1+2\,011\leqslant\frac{3}{4}a_n+2\,012.$$

下面用数学归纳法证明:

$a_n\leqslant\max\{A, 8\,048\}$.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

设当 $n=k$ 时,命题成立.

则当 $n=k+1$ 时,

$$a_{k+1}\leqslant\frac{3}{4}\max\{A, 8\,048\}+2\,012$$

$$\leqslant\frac{3}{4}\max\{A, 8\,048\}.$$

所以,对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 命题均成立.

由此知数列 $\{a_n\}$ 是一个有界的正整数数列.

于是,存在 $m$、$k\in\mathbf{N}_+$,使得 $a_m=a_{m+k}$.

因此,$a_{m+1}=a_{m+k+1}, \cdots\cdots a_{m+l}=a_{m+k+l}$.

故 $\{a_n\}$ 是从 $a_m$ 项开始周期为 $k$ 的数列.

**3.** 设 $p=k^2+r$,其中,$k$、$r$ 是整数,且满足 $0\leqslant r\leqslant 2k$.

因为 $\frac{\sqrt{p}-31}{75}$ 是 $\frac{1}{x}$ 的小数部分,所以,

$$0\leqslant\frac{\sqrt{p}-31}{75}<1 \Rightarrow 31\leqslant\sqrt{p}<106.$$

由 $p$ 为质数,知 $\sqrt{p}$ 为无理数,且

$[\sqrt{p}]=k$.

于是,$x=\sqrt{p}-k\ (0<x<1)$.

由于 $\frac{1}{x}>1$,设

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{p}-k}=N+\frac{\sqrt{p}-31}{75}\ (N\geqslant 1).$$

则 $$\frac{\sqrt{p}+k}{r}=N+\frac{\sqrt{p}-31}{75}.$$

由无理部分、有理部分分别相等得

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{75}, \frac{k}{r}=\frac{75N-31}{75}$$

$\Rightarrow r=75, k=75N-31$.

若 $N\geqslant 2$,则 $k\geqslant 75\times 2-31=119$.

于是,$[\sqrt{p}]=k\geqslant 119$,与 $31\leqslant\sqrt{p}<106$ 矛盾.

因此,$N=1, k=44$.

故 $p=44^2+75=2\,011$,且 $2\,011$ 是质数.

**4.** 不能.

把棋子按字典序重新编号,即 $(i, j)$ 编号为 $(i-1)n+j$. 棋盘的格子也按字典序编号,第 $i$ 行第 $j$ 列为 $(i-1)n+j$. 标准状态就是第 $k$ 枚棋子在第 $k$ 个格子中.

按格子的编号从小到大记录格子中棋子的编号,空格不记录. 于是,得到 $n^2-1$ 个数的一个排列.

下面分情形讨论.

(1)当 $n$ 为奇数时,移动空格左右两侧的棋子,对应的排列不变,移动空格上下两侧

的棋子,相当于对排列做了一个 $n$ 轮换.由于 $n$ 为奇数,则 $n$ 轮换是偶置换.因而,排列的奇偶性不变.

(2)当 $n$ 为偶数时,移动空格左右两侧的棋子,排列仍不变,移动空格上下两侧的棋子,排列的奇偶性互换,同时,空格所在行数的奇偶性也互换.

综上,对标准状态下,把编号 $(n,n-2)$ 与 $(n,n-1)$ 的两枚棋子换位,是无法移动到标准状态的.

## 第 二 天

**5.** 先证明:$O$ 是 $\triangle DEF$ 的垂心.

如图 2,设 $H$ 是 $\triangle DEF$ 的垂心,$DH$、$EH$、$FH$ 分别与 $EF$、$FD$、$DE$ 交于点 $L$、$M$、$N$.

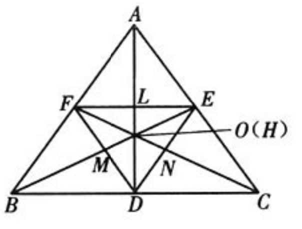


图 2

由 $\angle EHF=180°-\angle EDF$
$=180°-\angle EAF$,

知 $A$、$E$、$H$、$F$ 四点共圆.

于是,$\angle FAH=\angle FEH$.

同理,由 $B$、$D$、$H$、$F$ 四点共圆得 $\angle FBH=\angle FDH$.

因为 $D$、$E$、$L$、$M$ 四点共圆,所以,$\angle FEM=\angle FDL$.

于是,$\angle FAH=\angle FBH$.

因此,$HA=HB$.

同理,$HB=HC$.

从而,$H$ 是 $\triangle ABC$ 的外心 $O$.

设 $\angle OBC=\angle OCB=\alpha$,
$\angle OCA=\angle OAC=\beta$,
$\angle OAB=\angle OBA=\gamma$.

则 $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

因为 $BE\perp DF$,所以,$\angle BFD=90°-\gamma$.

由 $\angle BFC=2\beta+\gamma$,得

$\angle DFC=2\beta+\gamma-(90°-\gamma)$
$=2(\beta+\gamma)-90°=90°-2\alpha$.

又因为 $CF\perp DE$,所以,

$\angle DFC=90°-\angle FDE=90°-\angle BAC$
$=90°-(\beta+\gamma)=\alpha$.

于是,$90°-2\alpha=\alpha\Rightarrow\alpha=30°$.

同理,$\beta=\gamma=30°$.

故 $\angle BAC=\angle CBA=\angle ACB=60°$.

因此,$\triangle ABC$ 是正三角形.

**6.** 当 $x=y=z=0$ 时,不等式显然成立.

当 $x$、$y$、$z$ 不全为 0 时,将不等式变形为

$$-\frac{3}{2}\leqslant\frac{3xy+yz+zx}{x^2+y^2+2z^2}\leqslant\frac{3+\sqrt{13}}{4}.$$

设 $F(x,y,z)=\dfrac{3xy+yz+zx}{x^2+y^2+2z^2}$.

下面求 $F(x,y,z)$ 的值域.

当 $z=0$ 时,

$$F(x,y,z)=\frac{3xy}{x^2+y^2}\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right],$$

原不等式成立.

当 $z\neq0$ 时,

$Fx^2-(3y+z)x+[F(y^2+2z^2)-yz]=0$,

$\Delta=(3y+z)^2-4F[F(y^2+2z^2)-yz]$
$=9y^2+6yz+z^2-4F^2y^2-8F^2z^2+4Fyz$
$=(9-4F^2)y^2+(6z+4Fz)y+(z^2-8F^2z^2)$.

当 $F=\pm\dfrac{3}{2}$ 时,原不等式成立.

当 $F\neq\pm\dfrac{3}{2}$,即任意 $y\in\mathbf{R}$ 时,$\Delta\geqslant0$.

下面分两种情形讨论.

(1)当 $\Delta=0$ 时,

$\Delta_1=(6z+4Fz)^2-4(9-4F^2)(z^2-8F^2z^2)\geqslant0$.

则 $(3+2F)^2-(9-4F^2)(1-8F^2)$
$=-32F^4+80F^2+12F$
$=-4F(2F+3)(4F^2-6F-1)$

$$= -4^2F(2F+3)\left(F-\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)\left(F-\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right)$$

$\geqslant 0.$

故 $F\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right]\cup\left[0,\frac{3}{2}\right)\cup$

$$\left(\frac{3}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right].$$

(2) 当 $\Delta>0$ 时，

$$\begin{cases}9-4F^2>0,\\ \Delta_2=(6z+4Fz)^2-4(9-4F^2)(z^2-8F^2z^2)<0\end{cases}$$

$\Rightarrow F\in\left(\frac{3-\sqrt{13}}{4},0\right).$

综上，$F\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right].$

当 $x=-y,z=0$ 时，$F=-\frac{3}{2}$；

当 $x=\frac{20+6\sqrt{13}}{9+\sqrt{13}}z,y=\frac{9+\sqrt{13}}{3\sqrt{13}-7}z$ 时，

$F=\frac{3+\sqrt{13}}{4}$.

**7.** 用反证法.

假设命题不真，即存在

$1\leqslant A<B<C<D<E<F<G<H<I\leqslant 9\ 000,$

其中，任意四个数不满足题目中的不等式.

显然，$A\geqslant 1,B\geqslant A+1\geqslant 2,D\geqslant C+1.$

则 $4+C=1+2+(C+1)\leqslant A+B+D.$

于是，$A+B+D>4C$，即

$D\geqslant 4C-(A+B)+1$

$=2C+(C-A)+(C-B)+1$

$\geqslant 2\times 3+2+1+1=10.$

由 $E\geqslant D+1$，得

$4+D=1+2+(D+1)\leqslant A+B+E.$

于是，$A+B+4>4D$，即

$E\geqslant 4D-(A+B)+1$

$\geqslant 4[4C-(A+B)+1]-(A+B)+1$

$=16C-5(A+B)+5$

$\geqslant 6\times 3+5\times 2+5\times 1+5=38.$

类似地，

由 $4+E=1+2+(E+1)\leqslant A+B+F$，得

$F\geqslant 4E-(A+B)+1$

$\geqslant 4[16C-5(A+B)+5]-(A+B)+1$

$=64C-21(A+B)+21$

$=22C+21(C-B)+21(C-A)+21$

$\geqslant 22\times 3+21\times 2+21\times 1+21=150.$

由 $4+F=1+2+(F+1)\leqslant A+B+G$，得

$G\geqslant 4F-(A+B)+1$

$\geqslant 4[64C-21(A+B)+21]-(A+B)+1$

$=256C-85(A+B)+85$

$=86C+85(C-A)+85(C-B)+85$

$\geqslant 86\times 3+85\times 2+85\times 1+85=598.$

由 $4+G=1+2+(G+1)\leqslant A+B+H$，得

$H\geqslant 4G-(A+B)+1$

$\geqslant 4[256C-85(A+B)+85]-(A+B)+1$

$=1\ 024C-341(A+B)+341$

$=342C+341(C-A)+341(C-B)+341$

$\geqslant 342\times 3+341\times 2+341\times 1+341$

$=2\ 390.$

由 $4+H=1+2+(H+1)\leqslant A+B+I$，得

$I\geqslant 4H-(A+B)+1$

$\geqslant 4[1\ 024C-341(A+B)+341]-(A+B)+1$

$=4\ 096C-1\ 365(A+B)+1\ 365$

$=1\ 366C+1\ 365(C-A)+1\ 365(C-B)+1\ 365$

$\geqslant 1\ 366\times 3+1\ 365\times 2+1\ 365\times 1+1\ 365$

$=9\ 558.$

矛盾.

**8.** 准备 $n^2(n=8)$ 张卡片，正面卡号依次为 $1,2,\cdots,n^2$，背面对应写有该数在密码中的位置(从左数). 当然，操作人事先不知道背面数.

首先，将 $n^2$ 张卡片分成 $n$ 组(每组 $n$ 张)，前 $n$ 次操作将每组卡号各输入一次，即可知道每组卡片背面数的大小顺序(也记为卡片的大小顺序).

将每组卡片按从小到大排成一列放到桌面上，得到 $n\times n$ 数表 $(a_{ij})$，其中，$a_{ij}$ 为第 $j$ 组

第 $i$ 张卡片的卡号,其对应的背面数为 $b_{ij}$.

其次,再输入两次,分别为

$\{a_{1j}|j=1,2,\cdots,n\},\{a_{nj}|j=1,2,\cdots,n\}$.

将这 $2n$ 张卡片称为"原卡"(前者为"原小卡",后者为"原大卡"). 则

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} b_{1j}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n} b_{ij}=\min_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij},$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} b_{nj}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} b_{ij}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}.$$

从而,知道 $\{b_{ij}\}$ 中最小数、最大数所在的卡号(即密码首尾两个数). 从桌面上拿去这两张卡片,将前(后)者下(上)面的卡片移到其位上(称为"新小(大)卡").

然后,将这两个新卡与原小(大)卡中 $\frac{n}{2}-1$ 个较小(大)卡的卡号输入,即可知道余下 $n^2-2$ 个 $b_{ij}$ 中的最小数、最大数所在的卡号(即密码中第 $2$、$n^2-1$ 个数).

类似地,按照下面两种操作方法可将所有卡片按背后数从小到大排列,其正面卡号组成密码.

操作 A:当新小、大卡的个数均小于 $\frac{n}{2}$ 时,将这些新卡与原卡中若干个较小(大)卡组成 $\frac{n}{2}$ 个较小卡和 $\frac{n}{2}$ 个较大卡(即在桌面上第 $1$、$n$ 行各取 $\frac{n}{2}$ 个)输入后,即可知道桌面上所有卡的最小卡、最大卡所在的卡号. 拿去这两张卡片,将前(后)者下(上)面的卡片移到其位上(称为新小(大)卡).

操作 B:当新小(或大)卡的个数为 $\frac{n}{2}$ 时,将第 $1$(或 $n$)行上所有卡片(即 $\frac{n}{2}$ 个原小(或大)卡和 $\frac{n}{2}$ 个新小(或大)卡,将其都改称为原卡)的卡号输入后,即可知道桌面上所有卡的最小(或大)卡所在的卡号. 去掉该卡片,将其下(或上)面的卡片移到其位上(称为新小(或大)卡).

操作的可行性是显然的,且除了前 $n$ 次操作,所有的操作均可视为操作 A、B 之一,其中,第 $n+1$、$n+2$ 次操作可视为操作 B,第 $n+3$ 次操作可视为操作 A.

设操作 A、B 分别进行 $x$、$y$ 次后卡片被拿光.

因为每次操作 A 拿走 2 张卡片,每次操作 B 拿走 1 张卡片,最后一次操作至多拿走 $n$ 张卡片,故

$$2x+y\leqslant n^2-n+2.$$

注意到每次操作 A 新卡数至多增加 2,每次操作 B 新卡数减少 $\frac{n}{2}-1$.

若最后一次操作为操作 B,则

$$2x+2\geqslant\left(\frac{n}{2}-1\right)(y-2)+1; \qquad ①$$

若最后一次操作为操作 A,则

$$2(x-1)+2\geqslant\left(\frac{n}{2}-1\right)(y-2). \qquad ②$$

由式①、②

$$\Rightarrow 2x+y-1\geqslant\frac{n}{2}(y-2)$$

$$\Rightarrow n^2-n+1\geqslant\frac{n}{2}(y-2)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2}\leqslant n+\frac{1}{n}.$$

故操作总次数为

$$n+x+y=n+\frac{(2x+y)+y}{2}$$

$$\leqslant n+\frac{n^2-n+2}{2}+n+\frac{1}{n}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{1}{n}=45\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow n+x+y\leqslant 45.$$

**【注】**操作中若某列提前拿空,可从其他列第 $2\sim n-1$ 行中任取一张卡片补上.

(命题人 李建泉 李宝毅 丁云龙 潘 铁 宋 强)

# 第二届陈省身杯全国高中数学奥林匹克获奖名单

## 一等奖(34 名)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 刘志广 | 河北衡水中学 | 黄　金 | 天津一中 | 庞　硕 | 山西太原五中 |
| 潘寅旭 | 河北衡水中学 | 孙巍峰 | 河北衡水中学 | 韩松奇 | 天津耀华中学 |
| 莫凯淳 | 天津耀华中学 | 邵春霖 | 天津耀华中学 | 王　宇 | 山西实验中学 |
| 张蕾迪 | 河北唐山一中 | 武博阳 | 河北衡水中学 | 孟令镯 | 河北衡水中学 |
| 苏启舟 | 北京十一学校 | 甄伟浩 | 广东实验中学 | 陈麟瓒 | 广东实验中学 |
| 刘亮杰 | 湖北仙桃中学 | 刘清达 | 天津新华中学 | 李晓光 | 天津耀华中学 |
| 乔思远 | 山西实验中学 | 张　哲 | 山西大学附中 | 徐嘉泽 | 黑龙江大庆一中 |
| 吴再丹 | 广东实验中学 | 薛志鹏 | 天津南开中学 | 缪逸卓 | 天津新华中学 |
| 郑瑞驹 | 天津实验中学 | 董子超 | 北京十一学校 | 李宜泽 | 华南师大附中 |
| 孙子腾 | 河北衡水中学 | 刘　峰 | 河北衡水中学 | 王柏然 | 河北衡水中学 |
| 尚智伟 | 河北衡水中学 | 杨欣怡 | 大庆实验中学 | 胡维达 | 湖北仙桃中学 |
| 刘　帅 | 河北唐山一中 | | | | |

## 二等奖(41 名)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 李明月 | 山东济南历城二中 | 张宇辰 | 天津南开中学 | 刘昱恺 | 天津实验中学 |
| 毛　奥 | 天津实验中学 | 辛　未 | 天津耀华中学 | 杜雨昆 | 河北唐山一中 |
| 刘　哲 | 河北衡水中学 | 李艺超 | 河北衡水中学 | 郭　浩 | 河北衡水中学 |
| 杨　康 | 湖北仙桃中学 | 董馨远 | 山西大学附中 | 吕　达 | 山东莱芜第一中学 |
| 姜德青 | 北京十一学校 | 荆一凡 | 天津一中 | 胡　博 | 天津一中 |
| 俞宥彬 | 天津实验中学 | 袁晓璠 | 天津实验中学 | 向　禹 | 湖北仙桃中学 |
| 祁　佳 | 山西大学附中 | 何育泽 | 大庆外国语学校 | 范元瑞 | 河北衡水中学 |
| 高雪迪 | 河北衡水中学 | 郭　宇 | 河北衡水中学 | 刘　通 | 河北衡水中学 |
| 蔡占锐 | 河北衡水中学 | 董宇喆 | 河北衡水中学 | 刘斐齐 | 河北唐山一中 |
| 宋春秋 | 河北唐山一中 | 刘华帅 | 天津南开中学 | 薛博儒 | 天津耀华中学 |
| 张博纶 | 天津耀华中学 | 林国威 | 广东湛江一中 | 郑　璞 | 山西太原五中 |
| 林植茂 | 广东实验中学 | 徐子豪 | 北京十一学校 | 白宇清 | 北京十一学校 |
| 刘泓伯 | 河北唐山一中 | 张　默 | 河北衡水中学 | 解　岩 | 河北衡水中学 |
| 吴浩博 | 东北师大附中 | 傅梓豪 | 东北师大附中 | | |

另外,四川攀枝花市第三高级中学 彭思源 等 58 人获得三等奖。