2011年河北省高中数学竞赛试题参考答案

（时间：5月15日上午8：30～11：30）

一填空题（将每小题的答案填在题后的横线上，本大题共8小题，每小题9分，满分72分）

1．已知数列{ a_n }满足：$a_{n+1} \le \dfrac{a_{n+2}+a_n}{2}$，$a_1=1, a_{403}=2011$，则 a_5 的最大值为 ___21___.

解：显然{ a_n }构成的点列 (n,a_n) 排列在一下凸函数中，所以当点列分布在由点 $(1,1)$ 与 $(403,2011)$ 决定的直线上时其值最大. 故 $a_5=21$.

2. 若 x,y 均为正整数，且 x^5-y^5 的值恰好是由一个2，一个0，两个1组成的四位数，则满足条件的所有四位数是 2101 .

解：当 $x \ge 6$ 时，$x^5-y^5 \ge 6^5-5^5>2110$，$\therefore x \le 5$. 可验证，只有 $5^5-4^5=2101$ 一组解.

3．已知 $a^2+b^2+c^2=1$, 则 $ab+bc+ac$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{2},1]$.

解：显然有 $ab+bc+ac \le a^2+b^2+c^2=1$.

另一方面，$ab+bc+ac=a(b+c)+bc \ge -\dfrac{a^2+(b+c)^2}{2}+b\cdot c=-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=-\dfrac{1}{2}$，

仅当 $a+b+c=0$ 且 $a^2+b^2+c^2=1$ 时取"=".故值域为 $[-\dfrac{1}{2},1]$.

4．标号1，2，…，13号共4种颜色的卡片共计52张，加上两张空白卡片，平均放入三个不同的盒子，若某个盒子中有两张空白卡片，4张1，且2，3，…，13号卡片各一张，称该盒是"超级盒". 则出现超级盒的概率为 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\dfrac{(C_4^1)^{12}}{C_{46}^{12}}$（列出算式即可）.

解：先考虑一张空白卡片肯定要放入一个盒中，第二张也放入该盒的概率为 $\dfrac{1}{3}$, 4个1放入该盒的概率为 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$. 以后的过程是从剩余的46张卡片当中取出12张，每个号码恰好取一

个.所以超级盒出现的概率是$\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\dfrac{(C_4^1)^{12}}{C_{46}^{12}}$.

5. 已知$a_1=1,a_2=3,a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$，当$m\geq n$时，$a_m$的值都能被9整除，则$n$的最小值为__5__.

解：由$a_{n+2}-a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+2)a_n=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$

$=\cdots=(n+2)(n+1)n\cdots4\cdot3\cdot(a_2-a_1)=(n+2)!$

故$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1!+2!+\cdots+n!\quad(n\geq1)$

由$a_1=1,a_2=3,a_3=9,a_4=33,a_5=153$,此时153能被9整除.

当$m>5$时，$a_m=a_5+\sum\limits_{k=6}^{m}k\,!$，而$k\geq6$时，$k!$能被9整除，于是当$m\geq5$时，$a_m$能被9整除，故$n$的最小值是5.

6. 函数$f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\cdots+\dfrac{x+2010}{x+2011}$的图像的对称中心为__（-1006, 2011）__.

解：$f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\cdots+\dfrac{x+2010}{x+2011}$

$=2011-(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\cdots+\dfrac{1}{x+2011})$，

记$g(x)=(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\cdots+\dfrac{1}{x+2011})$，

$g(x-1006)=(\dfrac{1}{x-1005}+\dfrac{1}{x-1004}+\dfrac{1}{x-1003}+\cdots+\dfrac{1}{x+1005})$为奇函数.

所以$g(x)$的图像关于（-1006, 0）对称，则$f(x)$的图像关于（-1006, 2011）点对称.

7. 6名大学毕业生到3个用人单位应聘，若每个单位至少录用其中一人，则不同的录用情况的种数是__2100__.

解：被录用3人的情况有：A_6^3=120种；

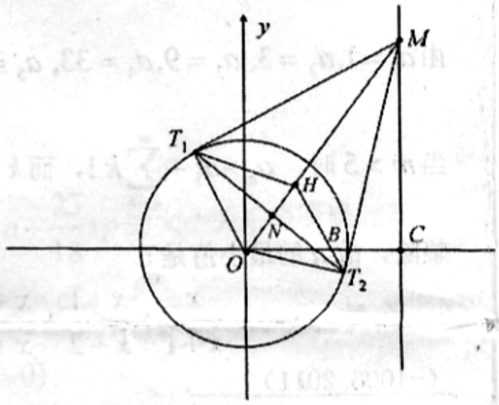
被录用4人的情况有：$C_6^4\cdot C_4^2\cdot A_3^3$=15×6×6=540种；

被录用 5 人的情况有：C_6^5（$C_5^3\ A_3^3+\dfrac{C_5^2C_3^2}{2!}A_3^3$）=900 种；

6 人全部被录取的情况有：$3^6-C_3^1\cdot 2^6+C_3^2\cdot 1^6$=540 种；

∴ 共有 120+540+900+540=2100 种.

8. 已知O为坐标原点，$B(4,0),C(5,0)$，过C作x轴的垂线，M是这垂线上的动点，以O为圆心，OB为半径作圆，MT_1,MT_2是圆的切线，则ΔMT_1T_2垂心的轨迹方程是$\underline{(x-\frac{16}{5})^2+y^2=(\frac{16}{5})^2,(x>0)}$.



解：以O为圆心，OB为半径的圆的方程为$x^2+y^2=16$. 连结OT_1,OT_2. H为ΔMT_1T_2的垂心，N为OM与T_1T_2的交点，易证四边形OT_2HT_1是菱形，所以$ON=\dfrac{1}{2}OH$. 又$OM\perp T_1T_2$，$OT_1\perp MT_1$，则$OT_1^2=ON\cdot OM$. 设点H的坐标为(x,y)，$M(5,b)$，则$N(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2})$，代入$OT_1^2=ON\cdot OM$. 并有$\dfrac{b}{5}=\dfrac{y}{x}$，

得$(x-\dfrac{16}{5})^2+y^2=(\dfrac{16}{5})^2$，（$x>0$）为所求.

二 解答题（本大题共 6 小题，每题的解答均要求有推理过程，9、10、11、12 小题各 12 分. 13、14 小题各 15 分. 共 78 分）

9. 解不等式$\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}<\dfrac{1}{x}$. $x+\frac{1}{x^2}+x-\frac{1}{x^2}-2\sqrt{x^2-\frac{1}{x^4}}$

$2x-2\sqrt{x^2-\frac{1}{x^4}}$

解：欲使不等式$\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}<\dfrac{1}{x}$成立，必需满足条件：

$\because \frac{1}{x^2}>0$

$\therefore x^2-\frac{1}{x^4}<x^2$

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{x^2}\ge 0\\ x-\dfrac{1}{x^2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{x^2}\ge 0\\ \dfrac{x^3-1}{x^2}\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\ge 1.$$

于是原不等式同解于：

$$\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}<1 \quad ① \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（6 分）}$$

将①式左边分子有理化得：

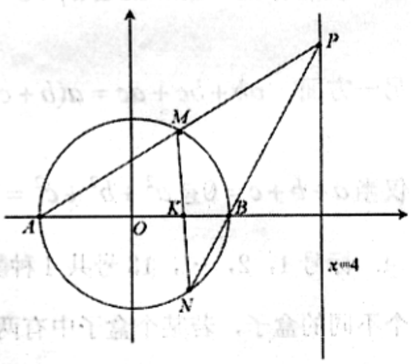
$$\frac{2}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}<1 \iff \sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}>2 \ . \quad ②$$

由①变形为 $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3+1}>-1$ ③ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（10 分）

由②、③两式同向相加得：$\sqrt{x^3-1}>\dfrac{1}{2}$，所以 $x^3>\dfrac{5}{4}$，$x>\dfrac{\sqrt[3]{10}}{2}$. $\cdots\cdots$（12 分）

10. 如图：已知 A,B 是圆 $x^2+y^2=4$ 与 x 轴的两个交点，P 为直线 $l:x=4$ 上的动点. PA,PB 与圆 $x^2+y^2=4$ 的另一个交点分别为 M,N.

求证：直线 MN 过定点.



证明：设 $P(4,y_0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

$$k_{BP}=\frac{y_0}{2}=3\cdot\frac{y_0}{6}=3k_{AP} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（3 分）}$$

即：$\dfrac{3y_1}{x_1+2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$

两边平方得：$\dfrac{9(4-x_1^2)}{(x_1+2)^2}=\dfrac{4-x_2^2}{(x_2-2)^2}$

整理为：$\dfrac{9(2-x_1)}{x_1+2}=\dfrac{2+x_2}{2-x_2}$.

即：$2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$

设 MN 的方程 $y=k(x-m)$，代入 $x^2+y^2-4=0$ 中得

$$(1+k^2)x^2-2k^2mx+k^2m^2-4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（8 分）}$$

由韦达定理：$x_1+x_2=\dfrac{2k^2m}{1+k^2},x_1x_2=\dfrac{k^2m^2-4}{1+k^2}$，代入①得

$$\frac{2k^2m^2-8}{1+k^2}-\frac{10k^2m}{1+k^2}+8=0$$

$$k^2\left(m^2-5m+4\right)=0$$

当$k\neq 0$， $m=1$或$m=4$（舍）．当$k=0$时，直线MN即为直线AB．

所以直线MN过$(1,0)$点. ……………………………………………………………（12分）

11. 求证：$n\geq 23$时，总有$2<1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}<3$成立.

证：先证：$1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}<3$

$$\frac{1}{\sqrt{k^3}}=\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}\sqrt{k-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}}<2\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}}=2(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}),(k\geq 2)$$

$\therefore 1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}<1+2(1-\frac{1}{\sqrt{n}})=3-\frac{2}{\sqrt{n}}<3$ ．……………………（6分）

再证$1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}>2\quad(n\geq 23)$.

类似可得：$1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}>1+2(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ ……………………（10分）

$\therefore$只需$1+2(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})>2$，解得：$n\geq 23$. ……………………………………（12分）

12. 已知：$f(x,y)=x^3+y^3+x^2y+xy^2-3(x^2+y^2+xy)+3(x+y)$，且$x,y\geq\frac{1}{2}$， 求$f(x,y)$的最小值.

解：设$x\neq y$，两边同乘$x-y$得：

$(x-y)f(x,y)=(x^4-y^4)-3(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)$ ……………………………（3分）

令：$g(x)=x^4-3x^3+3x^2$. ………………

则 $f(x,y)=\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}$ 为 $g(x)=x^4-3x^3+3x^2$ 图像上两点的斜率. ………（8分）

当 $x=y$ 时，$f(x,y)=4x^3-9x^2+6x$.

所以只需求 $g(x)$ 在 $x\geq\dfrac{1}{2}$ 上的导函数 $h(x)=4x^3-9x^2+6x$ 的最小值. ……（10分）

易求当 $x\geq\dfrac{1}{2}$ 时，$h(x)=4x^3-9x^2+6x$ 最小值为 1. ………………（12分）

13.（1）在 ΔABC 中，$\angle BCA=90^0$，则有 $AC^2+BC^2=AB^2$；类比到三维空间中，你能得到什么结论？请给出证明.

（2）在 ΔABC 中，$\angle BCA=90^0$，若点 C 到 AB 的距离为 h，ΔABC 的内切圆半径为 r，求 $\dfrac{r}{h}$ 的最小值.

（3）推广（2）的结论到三维空间，并证明之.

解：(1)结论：设四面体 $S-ABC$ 中，侧棱 SA,SB,SC 两两垂直（不妨称为空间直角四面体），则 $S^2{}_{\Delta ABC}=S^2{}_{\Delta SBC}+S^2{}_{\Delta SBA}+S^2{}_{\Delta SAC}$. ………………（2分）

证明：设 $SA=a,SB=b,SC=c$，过 S 作 $SD\perp BC$ 于 D，连结 AD，由三垂线定理知：$AD\perp BC$.

$$S^2{}_{\Delta ABC}=(\frac{1}{2}BC\cdot AD)^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2)\cdot(SD^2+a^2)$$

$$=\frac{1}{4}(b^2+c^2)\cdot(\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}+a^2)=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$=S^2{}_{\Delta SBC}+S^2{}_{\Delta SBA}+S^2{}_{\Delta SAC}.$$ ………………（5分）

（2）设 ΔABC 的内切圆心为 I，则 $CI+r\geqslant h$.（h 为 BC 边上的高），而 $CI=\sqrt{2}r$.故 $\dfrac{r}{h}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.且当 ΔABC 为等腰直角三角形时，得到最小值 $\sqrt{2}-1$.……（10分）

（3）结论：在空间直角四面体 $S-ABC$ 中，若其内切球半径为 r，点 S 到底面 ABC

距离为h，则$\frac{r}{h}\geq\sqrt{3}-1$. ………………………………………………………………（12分）

证明：设空间直角四面体$S-ABC$的内切球球心为I，则$SI+r\geqslant h$.（h为底面ABC上的高），而$SI=\sqrt{3}r,\frac{r}{h}\geq\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

且当$SA=SB=SC$时，得到最小值$\sqrt{3}-1$. ……………………………………………（15分）

14. 已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：$a_1=2p,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{p^2}{a_n}),b_n=\frac{a_n+p}{a_n-p}(n\in N^*,p>0)$.

（1）求数列$\{b_n\}$的通项；

（2）证明：$\frac{a_n-p}{a_{n+1}-p}=3^{2^{n-1}}+1$；

（3）设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，当$n\geq2$时，S_n与$(n+\frac{23}{18})p$的大小关系是否确定？请说明理由.

解：（1）$\because a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{p^2}{a_n}),b_n=\frac{a_n+p}{a_n-p}(n\in N^*,p>0)$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+p}{a_{n+1}-p}=\frac{a_n+\frac{p^2}{a_n}+2p}{a_n+\frac{p^2}{a_n}-2p}=\frac{(a_n+p)^2}{(a_n-p)^2}=b_n{}^2>0(n\in N^*,p>0)$$

$\therefore \lg b_{n+1}=2\lg b_n\quad \because p>0,\therefore b_n=\frac{a_n+p}{a_n-p}\neq1,\therefore \lg b_n\neq0,\therefore\frac{\lg b_{n+1}}{\lg b_n}=2.$

故数列$\{\lg b_n\}$是以2为公比，首项为$\lg b_1=\lg3$的等比数列.

$\lg b_n=2^{n-1}\cdot\lg3$，则$b_n=3^{2^{n-1}}$. ………………………………………………………（5分）

（2）由$b_n=\frac{a_n+p}{a_n-p}(n\in N^*,p>0)$得：$a_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}\cdot p=p+\frac{2p}{3^{2^{n-1}}-1}$，

$\therefore \dfrac{a_n - p}{a_{n+1} - p} = \dfrac{\dfrac{2p}{3^{2^{n-1}} - 1}}{\dfrac{2p}{3^{2^n} - 1}} = \dfrac{3^{2^n} - 1}{3^{2^{n-1}} - 1} = \dfrac{(3^{2^{n-1}})^2 - 1}{3^{2^{n-1}} - 1} = 3^{2^{n-1}} + 1$. 得证. ……………… (8 分)

(3) 当 $n \geq 2$ 时，$a_{n+1} - p = \dfrac{a_n - p}{3^{2^{n-1}} + 1} \leq \dfrac{1}{10}(a_n - p)$, 故当 $n = 2$ 时，

$S_n = S_2 = a_1 + a_2 = 2p + \dfrac{5}{4}p = \dfrac{13}{4}p$,

$(n + \dfrac{23}{18})p = (2 + \dfrac{23}{18})p = \dfrac{59}{18}p$, 而 $\dfrac{13}{4}p - \dfrac{59}{18}p = -\dfrac{1}{36}p < 0$, 即 $S_n < (n + \dfrac{23}{18})p$.

当 $n \geq 3$ 时，$a_3 - p \leq \dfrac{1}{10}(a_2 - p), a_4 - p \leq \dfrac{1}{10}(a_3 - p), \cdots, a_n - p \leq \dfrac{1}{10}(a_{n-1} - p)$,

$\therefore S_n - a_1 - a_2 - (n-2)p \leq \dfrac{1}{10}[S_{n-1} - a_1 - (n-2)p]$,

$\because a_1 = 2p, a_2 = \dfrac{5p}{4}, \therefore 10S_n - \dfrac{65}{2}p - 10(n-2)p \leq S_n - a_n - 2p - (n-2)p$

$\therefore S_n \leq [(n-2) + \dfrac{61}{18} - \dfrac{3^{2^{n-1}} + 1}{9(3^{2^{n-1}} - 1)}] \cdot p < (n + \dfrac{23}{18})p$

综上，当 $n \geq 2$ 时，$S_n < (n + \dfrac{23}{18})p$. ……………………………………………… (15 分)