2011年内蒙古自治区高中数学联赛预赛试题解答

内蒙古赤峰市宁城县教研中心 赵国义

1. 函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+10x-9}+\sqrt{-x^2+50x-184}$ **的最大值为**______________.

解: $f(x)=\sqrt{-x^2+10x-9}+\sqrt{-x^2+50x-184}=\sqrt{4^2-(x-5)^2}+\sqrt{21^2-(x-25)^2}$

设 $x-5=4\cos\alpha, x-25=21\cos\beta$ ①

代入上式得

$f(\alpha,\beta)=4\sin\alpha+21\sin\beta$ ②

由①②消去 x **得** $4\cos\alpha-21\cos\beta=20$ ③

将②③两边平方,然后两边相加得

$$[f(\alpha,\beta)]^2+20=(4\sin\alpha+21\sin\beta)^2+(4\cos\alpha-21\cos\beta)^2=16+441-168\cos(\alpha+\beta)$$

所以 $[f(\alpha,\beta)]^2=57-168\cos(\alpha+\beta)$

当 $\cos(\alpha+\beta)=-1$ **时,** $[f(x)]_{max}=\sqrt{57+168}=15$

2． 各位数字之和等于 11 的四位数的个数为__________________.

解:我们把这个问题转化为下成的一个的模型(如图).

若四位数的数位上没有 0则把以上图案分成四部分的方法有:C_{10}^{3}.

若四位数的数位上有 1 个数位上有 0则把以上图案分成三部分的方法有:$3C_{10}^{2}$.

若四位数的数位上有 2 个数位上有 0则把以上图案分成二部分的方法有:$3C_{8}^{1}$.

所以$n=C_{10}^{3}+3C_{10}^{2}+3C_{8}^{1}=279$

3. 数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，且$a_1=1,3S_n=(n+2)a_n\left(n=2,3,\cdots\right)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=$__________;

解：当$n\geq 2$时，$3a_n=3\left(S_n-S_{n-1}\right)=\left(n+2\right)a_n-\left(n+1\right)a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$

所以当$n\geq 2$时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{1}\cdot 1=\frac{(n+1)!}{2(n-1)!}=\frac{(n+1)n}{2}$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{i(i+1)}=2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$。

4. 方程 $x^2-8[x]+7=0$ 的所有解为________________.

解:因为 $x\geq[x]=\dfrac{x^2+7}{8}>0$,所以 $x^2-8x+7\leq 0$,即 $1\leq x\leq 7$

$[x]=1$ 时, $x^2=1, x=1$.

$[x]=2$ 时, $x^2=9, x=3$ 与 $[x]=2$ 矛盾.

$[x]=3$ 时, $x^2=17, [x]=4$, 与 $[x]=3$ 矛盾.

$[x]=4$ 时, $x^2=25, x=5$, 与 $[x]=5$ 矛盾

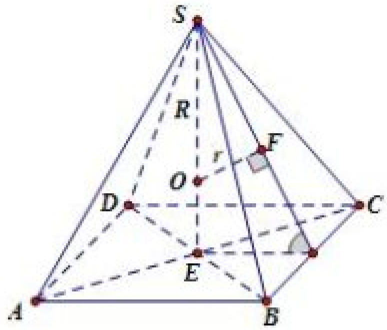
$[x]=5$ 时, $x^2=33, x=\sqrt{33}, [x]=5$

$[x]=6$ 时, $x^2=41, x=\sqrt{41}, [x]=6$

$[x]=7$ 时, $x^2=49, x=7$,

综上有方程 $x^2-8[x]+7=0$ 的解集为 $\{1,\sqrt{33},\sqrt{41},7\}$

5．已知正四棱锥中 $S-ABCD$ 的侧面与底面所角都为 $\frac{\pi}{3}$，由它的外接球半径 R 与内切球半径 r 的比为__________.



解:如图,显然 $R:r=2:1$

6. 若在复平面上三个点 $A(0), B\left(z_0-z\right), C\left(z_0+z\right)$ 构成以 A 为顶点的等腰直角三角形, 其中 $z_0=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i$, 则三角形 ABC 的面积为__________

解:不妨设 $i\left(z_0-z\right)=z_0+z$, 即 $z=\frac{i-1}{i+1}z_0=-iz_0$,

所以 $|AB|=|AC|=\left|z_0-z\right|=|1+i|\left|z_0\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则三角形 ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}|AB|^2=\frac{1}{3}$

7. $(x+i)^{100}$ 的展开式中, 各项系数和为____________.

解. 令 $x=1$, 各项系数和为 $(1+i)^{100}=(2i)^{50}=-2^{50}$.

8. 设 k 为正实数，若满足条件 $x(x-k)\le y(k-y)$ 的点 (x,y) 都被单位圆覆盖，则 k 的最大值为___________.

解：$x(x-k)\le y(k-y)\Leftrightarrow\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)\le\frac{k^2}{2}(k>0)$

表示以 $\left(\frac{k}{2},\frac{k}{2}\right)$ 为圆心以，$\frac{k}{\sqrt{2}}$ 为半径的圆的内部(含边界)，若其被单位圆覆盖，则其充要条件为 $\frac{k}{\sqrt{2}}\le 1$，即 $0<k\le\sqrt{2}$，所以 $k_{\max}=\sqrt{2}$

9. 已知椭圆 C 过点 M(2,1),两个焦点分别为($-\sqrt{6}$,0)和($\sqrt{6}$,0),O 为坐标原点,平行于 OM 的直线l交椭圆 C 于不同的两点 A,B,求△OAB 面积的最大值.

解: $2a=\sqrt{\left(2+\sqrt{6}\right)^2+1}+\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2+1}=\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)=4\sqrt{2}$

$b^2=a^2-c^2=8-6=2$,所以椭圆 C 的方程是$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$①

设直线l有方程是$y=\dfrac{1}{2}x+m(m\neq 0)$,代入椭圆 C 的方程①得

$x^2+2mx+2m^2-4=0$,设$A\left(x_1,y_1\right)$,$B\left(x_2,y_2\right)$

则$\Delta=4m^2-4\left(2m^2-4\right)>0$,即$m^2<4$;②

$x_1+x_2=-2m,x_3+x_4=2m^2-4$所以$|AB|=\sqrt{\dfrac{5}{4}}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{5\left(4-m^2\right)}$

△OAB 面积=$\dfrac{1}{2}\sqrt{5\left(4-m^2\right)}\cdot\dfrac{2|m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{4-m^2}\cdot|m|\leq\left(\dfrac{4-m^2+m^2}{2}\right)^2=4$

当且仅当$m^2=2<4$时(满足②式),△OAB 面积的最大值为 4.

10. 已知实数$a_i, i=1,2,\cdots,n$，满足$|a_i|\le 1$，且$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$，求证：对于满足$|x|\le 1$任意实数x

均有$\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|\le n$

解(本题解答北京王芝平老师提供，在此致谢！)

不失一般性，设$-1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le 1$

(1) 当$-1\le x\le a_1$时，$\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|=\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)\le -nx\le n$.

(2) 当$a_n\le x\le 1$时，$\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)\le nx\le n$时.

(3) 当$-1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_k\le x\le a_{k+1}\le\cdots\le a_n\le 1\left(k\in N^*, k\le n\right)$时

$$\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|=\sum_{i=1}^{k}|x-a_i|+\sum_{i=k+1}^{n}|x-a_i|=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)+\sum_{i=k+1}^{n}(a_i-x)=(2k-n)x-\sum_{i=1}^{k}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i$$

而$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$**，所以**(i)**若**$2k-n\ge 0$**时，上式等价于**

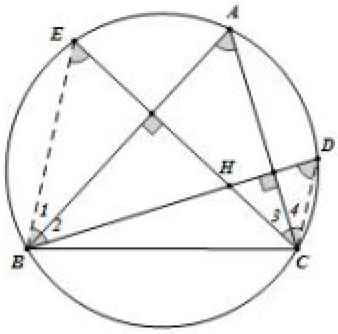
$$\sum_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|=(2k-n)x-\sum_{i=1}^{k}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i=\left(2k-n\right)x+2\sum_{i=k+1}^{n}a_i\le\left(2k-n\right)+2\left(n-k\right)=n.$$

(ii) 若若 $2k-n<0$ 时,上式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|=(2k-n)x-\sum_{i=1}^{k}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i=\left(2k-n\right)x-2\sum_{i=1}^{k}a_i\le\left(n-2k\right)+2k=n.$$

等价于综上所述对于满足 $\left|x\right|\le 1$ 任意实数 x 均有 $\sum_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|\le n$

11. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 H 为其垂心, $\angle A=60°$,直线 BH. CH 分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D. E 两点,求证:$BD=CE$



证明:连接 BE、CD,$\because \angle A=60°$,

$\therefore \angle D=\angle E=\angle A=60°$

$\because$ 点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=30°$

即 $\angle EBH=\angle HCD=60°$,

$\therefore \Delta EBH,\Delta HCD$ 都为等边三角形,$\therefore$ HE=HB,HD=HC,从而 BD=CE