2011 年第八届中国东南地区数学奥林匹克

第一天(2011.7.27)

1. 已知$\min\limits_{x\in R}\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}=3$.

（1）求 b 的取值范围;（2）对给定的 b,求 a.

解法 1　记 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}$. 由 $f(0)=b$ 知，$b\geq 3$，且易知 $a>0$.

（i）当 $b-2a\geq 0$ 时，

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}=a\sqrt{x^2+1}+\frac{b-a}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2\sqrt{a(b-a)}=3$$

等号当 $a\sqrt{x^2+1}=\dfrac{b-a}{\sqrt{x^2+1}}$ 时，即 $x=\pm\sqrt{\dfrac{b-2a}{a}}$ 时取到

此时，$a=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-9}}{2}$，特别当 $b=3$ 时，$a=\dfrac{3}{2}$

（ii）当 $b-2a<0$ 时，令 $\sqrt{x^2+1}=t\quad(t\geq 1)$

$f(x)=g(t)=at+\dfrac{b-a}{t}$　当 $t\geq 1$ 时单调增加，所以

$\min f(x)=g(1)=a+b-a=b=3$，此时 $a>\dfrac{3}{2}$

综上所述：（1）b 的取值范围是 $[3,+\infty)$

（2）当 $b=3$ 时，$a\geq\dfrac{3}{2}$；当 $b>3$ 时，$a=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-9}}{2}$

解法 2　设 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}$. 因为 $\min\limits_{x\in R}\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{x^2+1}}=3$，且 $f(0)=b$，所以 $b\geq 3$

易知 $a>0$，$f'(x)=\dfrac{ax(x^2-\dfrac{b-2a}{a})}{(x^2+1)^{3/2}}$

（i）当$b-2a\le 0$时，令$f'(x)=0$得驻点$x_0=0$，且有

$x<0$时，$f'(x)<0$；$x>0$时，$f'(x)>0\Rightarrow f(0)=b$为最小值

所以$b=3$

即① $b=3$，② $a\ge\dfrac{b}{2}$

（ii）当$b-2a>0$时，令$f'(x)=0$得驻点$x_0=0$，$x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{b-2a}{a}}$

此时易知$f(0)=b$不是最小值$\Rightarrow b>3$，$f(x_{1,2})$为最小值

$$f(x_{1,2})=\frac{a\cdot\dfrac{b-2a}{a}+b}{\sqrt{\dfrac{b-2a}{a}+1}}=3\Rightarrow 2\sqrt{a(b-a)}=3$$

$$\Rightarrow a^2-ab+\frac{9}{4}=0\Rightarrow a=\frac{b\pm\sqrt{b^2-9}}{2}$$

即① $b>3$，② $a=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-9}}{2}$

综上所述：（1）b的取值范围是$[3,+\infty)$

（2）当$b=3$时，$a\ge\dfrac{3}{2}$；当$b>3$时，$a=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-9}}{2}$

2. 已知a、b、c为两两互质的正整数，且$a^2\left|(b^3+c^3),\ b^2\right|(a^3+c^3),\ c^2\left|(a^3+b^3)\right.$，求$a$、$b$、$c$ 的值。

解答　由题设可得到：$a^2\left|(a^3+b^3+c^3),\ b^2\right|(a^3+b^3+c^3),\ c^2\left|(a^3+b^3+c^3)\right.$，又因为$a$、$b$、$c$两两互质，所以$a^2b^2c^2\left|(a^3+b^3+c^3)\right.$。不妨设$a\ge b\ge c$，所以

$$3a^3\ge a^3+b^3+c^3\ge a^2b^2c^2\Rightarrow a\ge\frac{b^2c^2}{3}$$

又$2b^3\ge b^3+c^3\ge a^2\Rightarrow 2b^3\ge\dfrac{b^4c^4}{9}\Rightarrow b\le\dfrac{18}{c^4}$

当$c\ge 2\Rightarrow b\le 1$，与$b\ge c$矛盾。所以$c=1$。显然（1,1,1）是一组解。

当$b\ge 2$时，$a>b>c$。

由$a^2b^2\left|(a^3+b^3+1)\Rightarrow 2a^3\ge a^3+b^3+1\ge a^2b^2\Rightarrow a\ge\frac{b^2}{2}\right.$

又由$a^2\left|(b^3+1)\Rightarrow b^3+1\ge a^2\ge\frac{b^4}{4}\right.$：当$b>5$时，无解；经验证，$b=2$，$c=3$。所以满足条件正整数为

（1,1,1），（12,3），（1,3,2），（2,1,3），（2,3,1），（3,2,1），（3,1,2）。

3．设集合$M=\{1,2,3,\cdots,50\}$，正整数n满足：M的任意一个35元子集中至少存在两个不同的元素a,b，使$a+b=n$或$a-b=n$.求出所有这样的n.

解答　取$A=\{1,2,3,\cdots,35\}$，则对任意$a,b\in A$，$a-b,a+b\le 34+35=69$

下面证明$1\le n\le 69$．设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{35}\},a_1<a_2<\cdots<a_{35}$

（i）当$1\le n\le 19$时，

考虑$1\le a_1<a_2<\cdots<a_{35}\le 50$

$$1\le a_1+n<a_2+n<\cdots<a_{35}+n\le 50+19=69$$

由抽屉原理，存在$1\le i,j\le 35$，使$a_i+n=a_j$，即$a_i-a_j=n$

（ii）当$51\le n\le 69$时，

由$1\le a_1<a_2<\cdots<a_{35}\le 50$

$$1\le n-a_{35}<n-a_{34}<\cdots<n-a_1\le 68$$

由抽屉原理，至少存在$1\le i,j\le 35$，使$n-a_i=a_j$，即$a_i+a_j=n$

（iii）当$20\le n\le 24$时，

由于$50-(2n+1)+1=50-2n\le 50-40=10$

所以$a_1,a_2,\cdots,a_{35}$中至少有25个属于$[1,2n]$

又由于$\{1,n+1\},\{2,n+2\},\cdots,\{n,2n\}$至多有24个

存在a_i,a_j，使$\{a_i,a_j\}=\{i,n+i\}$，所以$a_j-a_i=n$

（iv）当$25\le n\le 34$时，

由$\{1,n+1\},\{2,n+2\},\cdots,\{n,2n\}$至多有34个

由抽屉原理，存在i,j使$a_i=i,a_j=n+i$，即$a_j-a_i=n$

（v）当$n=35$时，

$\{1,34\},\{2,33\},\cdots,\{17,18\},\{35\},\{36\},\cdots,\{50\}$共 33 个

所以，存在$1\le i,j\le 35$，使得$a_i+a_j=35$

（vi）当$36\le n\le 50$时，

若$n=2k+1$，$\{1,2k\},\{2,2k-1\},\cdots,\{k,k+1\},\{2k+1\},\cdots,\{50\}$

当$18\le k\le 20$时，$50-(2k+1)+1=50-2k\le 50-36=14$

当$21\le k\le 24$时，$50-(2k+1)+1=50-2k\le 50-42=8$

均存在i,j使$a_i+a_j=2k+1=n$

若$n=2k$，$\{1,2k-1\},\{2,2k-2\},\cdots,\{k-1,k+1\},\{k\},\{2k\},\{2k+1\},\cdots,\{50\}$

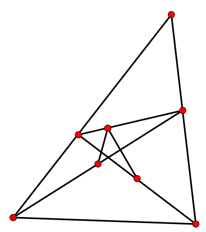
当$18\le k\le 19$时，$50-(2k+1)+3\le 16\quad k-1\le 19-1=18$

当$20\le k\le 23$时，$50-(2k+1)+3\le 50-2k+2\le 12\quad k-1\le 23-1=22$

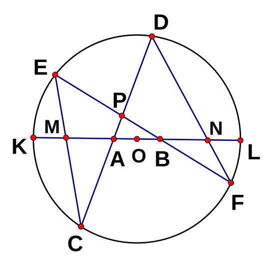
当$24\le k\le 25$时，$50-(2k+1)+3\le 50-2k+2\le 4\quad k-1\le 25-1=24$

所以，均存在i,j使$a_i+a_j=2k$

4．如图，过ΔABC的外心O任作一直线，分别交边AB,AC于M,N，E,F分别是BN,CM的中点. 证明：$\angle EOF=\angle A$.



先证引理：如图，过$\odot O$的直径KL上的两点A,B分别作弦CD,EF，连CE,DF，分别交K,L于M,N，若$OA=OB$，则$MA=NB$.



引理证明：设$CD\bigcap EF=P$，直线CE,DF分别截ΔPAB，

据梅涅劳斯定理，$\dfrac{AC}{CP}\cdot\dfrac{PE}{EB}\cdot\dfrac{BM}{MA}=1$，$\dfrac{BF}{FP}\cdot\dfrac{PD}{DA}\cdot\dfrac{AN}{NB}=1$；

则$\dfrac{MA}{NB}=\dfrac{AC\cdot AD\cdot PE\cdot PF\cdot BM}{BE\cdot BF\cdot PC\cdot PD\cdot AN}$　　……①

而由相交弦，得$PC\cdot PD=PE\cdot PF$　……②

若$\odot O$的半径为R，$OA=OB=a$，则

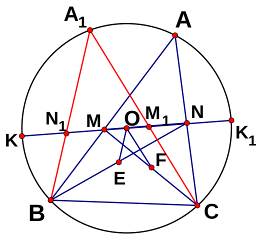
$AC\cdot AD=AK\cdot AL=R^2-a^2=BK\cdot BL=BE\cdot BF$　…③，据①②③得，

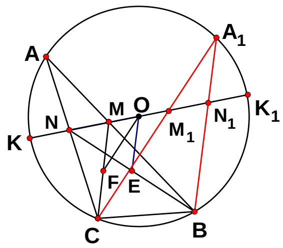
$\frac{MA}{NB}=\frac{MB}{NA}$，即$\frac{MA}{NB}=\frac{MA+AB}{NB+AB}=\frac{AB}{AB}=1$. 因此$MA=NB$. 引理得证.
回到本题，如下图（两图都适用），延长MN得直径

KK_1，在直径上取点M_1，使$OM_1=OM$，设$CM_1\cap\odot O=A_1$，连A_1B交KK_1于N_1，由

引理，$MN_1=M_1N$，（右图中则是$M_1N_1=MN$）因此，O是NN_1的中点，故OE,OF分

别是ΔNBN_1及ΔMCM_1的中位线，于是得$\angle EOF=\angle BA_1C=\angle A$.



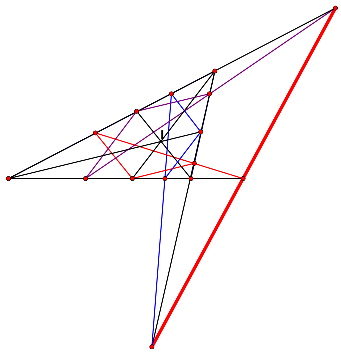


第一天(2011.7.28)

5．设AA_0,BB_0,CC_0是ΔABC的三条角平分线，自A_0作$A_0A_1 \parallel BB_0$，

$A_0A_2 \parallel CC_0$，A_1,A_2分别在AC,AB上，直线$A_1A_2\cap BC=A_3$；类似得到点B_3,C_3.

证明：A_3,B_3,C_3三点共线.



证明：据梅尼劳斯逆定理，

只要证，$\frac{AB_3}{B_3C}\cdot\frac{CA_3}{A_3B}\cdot\frac{BC_3}{C_3A}=1$ …… ①

由于直线$A_1A_2A_3$截ΔABC，得$\frac{CA_3}{A_3B}\cdot\frac{BA_2}{A_2A}\cdot\frac{AA_1}{A_1C}=1$，所以

$\frac{CA_3}{A_3B}=\frac{A_2A}{BA_2}\cdot\frac{A_1C}{AA_1}$ …… ②;

同理有$\frac{AB_3}{B_3C}=\frac{B_2B}{CB_2}\cdot\frac{B_1A}{BB_1}$ …… ③，$\frac{BC_3}{C_3A}=\frac{C_2C}{AC_2}\cdot\frac{C_1B}{CC_1}$…… ④.

由$BA_2=\frac{BC_0}{BC}\cdot BA_0$，$AA_2=\frac{AA_0}{AI}\cdot AC_0$，得$\frac{AA_2}{BA_2}=\frac{AA_0\cdot AC_0}{BA_0\cdot BC_0}\cdot\frac{BC}{AI}$ ⋯ ⑤

又由$AA_1=\frac{AA_0}{AI}\cdot AB_0$，$CA_1=\frac{CA_0}{CB}\cdot CB_0$，得$\frac{A_1C}{AA_1}=\frac{CA_0\cdot CB_0}{AA_0\cdot AB_0}\cdot\frac{AI}{BC}$ ⋯ ⑥

据②、⑤、⑥得$\frac{CA_3}{A_3B}=\frac{CA_0}{BA_0}\cdot\frac{AC_0}{BC_0}\cdot\frac{CB_0}{AB_0}=\left(\frac{CA_0}{A_0B}\right)^2$；

同理可得，$\frac{CB_3}{B_3A}=\left(\frac{CB_0}{B_0A}\right)^2$，$\frac{AC_3}{C_3B}=\left(\frac{AC_0}{C_0B}\right)^2$ …… ⑦

由于ΔABC的三条角平分线AA_0,BB_0,CC_0共点，由塞瓦定理，

$\frac{AB_0}{B_0C}\cdot\frac{CA_0}{A_0B}\cdot\frac{BC_0}{C_0A}=1$ …… ⑧，于是由⑦、⑧得，

$\frac{AB_3}{B_3C}\cdot\frac{CA_3}{A_3B}\cdot\frac{BC_3}{C_3A}=\left(\frac{AB_0}{B_0C}\cdot\frac{CA_0}{A_0B}\cdot\frac{BC_0}{C_0A}\right)^2=1$，即①成立，因此结论得证.

6．设$P_1,P_2,\cdots,P_n$为平面上 n 个定点，M 是该平面内线段 AB 上任一点，记$\left|P_iM\right|$为点P_i与 M 的距离，$i=1,2,3,\cdots,n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\left|P_iM\right|\le\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|P_iA\right|,\quad\sum_{i=1}^{n}\left|P_iB\right|\right\}.$$

解答　设原点为 O，则有：$\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\quad t\in(0,1)$

$|P_iM|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP_i}|=|t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OP_i}-(1-t)\overrightarrow{OP_i}|$

$\le t|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP_i}|+(1-t)|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP_i}|=t|P_iA|+(1-t)|P_iB|$

因此$\sum_{i=1}^{n}\left|P_iM\right|\le t\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{P_iA}|+(1-t)\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{P_iB}|\le\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|P_iA\right|,\quad\sum_{i=1}^{n}\left|P_iB\right|\right\}$

7．设数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=a_2=1,a_n=7a_{n-1}-a_{n-2},n\ge3$．证明：对于每个$n\in N^*$，

$a_n + a_{n+1} + 2$ 皆为完全平方数.

证：易求得数列开初的一些项为：$1,1,6,41,281,1926$，…，

注意到，$a_1 + a_2 + 2 = 2^2, a_2 + a_3 + 2 = 3^2, a_3 + a_4 + 2 = 7^2, a_4 + a_5 + 2 = 1\ \ ^2$，…，

构作数列$\{x_n\}$：$x_1 = 2, x_2 = 3, x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}, n \ge 3$，则对每个$n \in N^*$，$x_n$为正整数.

我们来证明：对于每个$n \in N^*$，皆有：$a_n + a_{n+1} + 2 = x_n^2$.

引理：数列$\{x_n\}$满足：对于每个$k \in N^*$，$x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2 = 5$.

引理证明：令 $f(k) = x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2$，则

$$f(k) - f(k-1) = (x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2) - (x_{k-1}x_{k+1} - x_k^2) = (x_k x_{k+2} + x_k^2) - (x_{k+1}^2 + x_{k-1}x_{k+1})$$

$$= x_k(x_{k+2} + x_k) - x_{k+1}(x_{k+1} + x_{k-1}) = 3x_k x_{k+1} - 3x_{k+1}x_k = 0.$$

所以 $f(k) = f(k-1)$，于是 $f(k) = f(k-1) = f(k-2) = \cdots = f(1) = x_1 x_3 - x_2^2 = 5$.

回到本题，对n归纳，据数列$\{a_n\}$的定义，$a_1 + a_2 + 2 = 4 = x_1^2, a_2 + a_3 + 2 = 9 = x_2^2$，

若结论直至$n\,(n \ge 2)$皆已成立，则对于$n+1$，有

$$a_{n+1} + a_{n+2} + 2 = (7a_n - a_{n-1}) + (7a_{n+1} - a_n) + 2 = 7(a_n + a_{n+1} + 2) - (a_{n-1} + a_n + 2) - 10$$

$$= 7x_n^2 - x_{n-1}^2 - 10 = (3x_n)^2 - x_{n-1}^2 - 2x_n^2 - 10 = (3x_n - x_{n-1})(3x_n + x_{n-1}) - 2x_n^2 - 10$$

$$= x_{n+1}(x_{n+1} + 2x_{n-1}) - 2x_n^2 - 10 = x_{n+1}^2 + 2(x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2 - 5) = x_{n+1}^2.$$

即在$n+1$时结论也成立．故本题得证.

8．将时钟盘面上标有数字$1,2,\cdots,12$的十二个点，分别用红、黄、蓝、绿四种颜色各染三个点，现以这些点为顶点构作n个凸四边形，使其满足：

（1）每个四边形的四个顶点四色都有；

（2）任何三个四边形，都存在某一色，该色的三个顶点所标数字各不相同.

求n的最大值.

解：为叙述方便，改用A,B,C,D分别表示这四种颜色，而同色的三点，则分别用

a_1,a_2,a_3；b_1,b_2,b_3；c_1,c_2,c_3以及d_1,d_2,d_3来表示.

今考虑其中一色，例如A色；若在这n个四边形中，A色点a_1,a_2,a_3出现的次数分别为

n_1,n_2,n_3，则 $n_1+n_2+n_3=n$，且设 $n_1\ge n_2\ge n_3$；

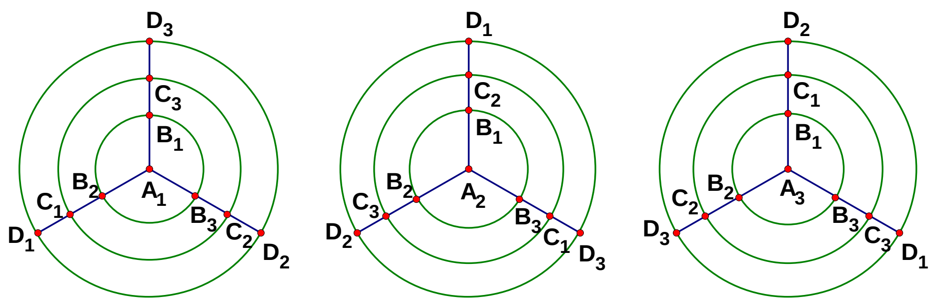
如果 $n\ge 10$，则 $n_1+n_2\ge 7$；再考虑这 7 个四边形（其 A 色顶点要么是 a_1，要么是 a_2），它们中 B 色点 b_1,b_2,b_3 出现的次数分别为 m_1,m_2,m_3，则 $m_1+m_2+m_3=7$，据对称性，可设 $m_1\ge m_2\ge m_3$，则 $m_3\le 2$，即 $m_1+m_2\ge 5$；

继续考虑这 5 个四边形（其 A 色顶点要么是 a_1，要么是 a_2；B 色顶点要么是 b_1，要么是 b_2），它们中 C 色点 c_1,c_2,c_3 出现的次数分别为 k_1,k_2,k_3，则 $k_1+k_2+k_3=5$，据对称性，可设 $k_1\ge k_2\ge k_3$，则 $k_3\le 1$，即 $k_1+k_2\ge 4$；

最后考虑这 4 个四边形，记为 T_1,T_2,T_3,T_4（其 A 色顶点要么是 a_1，要么是 a_2；B 色顶点要么是 b_1，要么是 b_2；C 色顶点要么是 c_1，要么是 c_2），由于 D 色点只有三个，故其中必有两个四边形，其 D 色点相同，设 T_1,T_2 的 D 色点都为 d_1；

那么，三个四边形 T_1,T_2,T_3 中，无论哪种颜色的顶点，所标数字皆有重复，这与条件 (2) 相矛盾！因此，$n\le 9$.

再说明，最大值 $n=9$ 可以取到；采用构造法，我们只要作出这样的九个四边形即可.



作三个“同心圆环图”，给出标号，并适当旋转相应的圆，标号对齐后，图中的每根线（半径）上的四个点分别表示一个四边形的四个顶点颜色及其标号，九条半径共给出九个四边形，且都满足条件（1）；

再说明，它们也满足条件（2）：从中任取三条半径（三个四边形）；

如果三条半径（三个四边形）来自同一个图，则除了 A 色之外，其余 B,C,D 每色的顶点，三数全有；

如果三条半径（三个四边形）分别来自三个图，则 A 色的顶点，三数全有；

如果三条半径（三个四边形）分别来自两个图：将三个图分别称为 A_1 图、A_2 图、A_3 图，每图的三条半径分别称为“向上半径”、“向左半径”、“向右半径”；且分别记为 S,Z,Y .

来自两个图的三条半径，如果“向上”、“向左”、“向右”三种半径都有，那么相应的三个四边形，B色的顶点，三数全有；

如果三条半径，只涉及两个图，两个方位，将图A_1,A_2,A_3分别简记为$1,2,3$，则按三个图的搭配情况，可得下表：

S	1,2	1,2	2		1	
Z	1		1,2	1,2		2
Y		2		1	1,2	1,2

产生C色三数

S	1,2	1,2	1		2	
Z	2		1,2	1,2		1
Y		1		2	1,2	1,2

产生D色三数

S	1,3	1,3	1		3	
Z	3		1,3	1,3		1
Y		1		3	1,3	1,3

产生C色三数

S	1,3	1,3	3		1	
Z	1		1,3	1,3		3
Y		3		1	1,3	1,3

产生D色三数

S	2,3	2,3	3		2	
Z	2		2,3	2,3		3
Y		3		2	2,3	2,3

产生C色三数

S	2,3	2,3	2		3	
Z	3		2,3	2,3		2
Y		2		3	2,3	2,3

产生D色三数