2012年第38届俄罗斯数学奥林匹克十年级试题

1. $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 是不小于 3 的互异正整数, 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 678$. 是否存在正整数 n, 使得当 n 分别除以 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \cdots, 2a_{10}$ 这 20 个数时所得到的余数的和等于 2012?

2. 非等腰锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 切边 BC 于 D, I 和 O 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和外心. $\triangle AID$ 的外接圆交直线 AO 于 A 和 E. 求证: 线段 AE 的长等于圆 ω 的半径.

3. 实数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 中任意两个的差的绝对值不小于 1. 已知存在实数 k 满足: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. 求证: $k^2 \geqslant \dfrac{25}{3}$.

4. 初始时黑板上写着 $n+1$ 多项式: $1, x, x^2, \cdots, x^n$. k 个男孩开始玩如下游戏: 每过一分钟, 每个男孩同时将黑板上已有的两个多项式的和各自写到黑板上. 已知经过 m 分钟后, 多项式 $S_1 = 1+x, S_2 = 1+x+x^2, \cdots, S_n = 1+x+x^2+\cdots+x^n$ 全都在黑板上出现了. 求证: $m \geqslant \dfrac{2n}{k+1}$.

5. 101 个智者围坐一圈开圆桌会议讨论地球和木星谁绕谁转的问题. 开始及随后的每个时刻每个智者持有地球绕木星转或木星绕地球转这两种观点之一. 各智者按以下规则每分钟一次同时宣布自己的观点: 除第一次以外, 如果在上一分钟时一个智者的相邻两人(左右各一人)与其观点都不相同, 则智者改变自己的观点, 否则不改变自己的观点. 求证: 若干分钟后, 所有的人都不再改变自己的观点.

6. 是否存在大于 10^{10} 的三个正整数 a, b, c 满足: abc 是 $a+2012$, $b+2012$ 和 $c+2012$ 的公倍数.

7. 在坐标平面上, 画有 n 个两两不相切的二次函数的图像. P 表示位于所有 n 个图像上侧的点组成的集合. 求证: P 的边界上至多有 $2(n-1)$ 个角(两个二次函数图像的交点称为角).

8. 设点 H 是一个非等腰的锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, E 是 AH 的中点, $\triangle ABC$ 的内切圆与边 AB 和 AC 分别切于 C' 和 B'. F 是 E 关于直线 $B'C'$ 的对称点. 求证: F 与 $\triangle ABC$ 的内心和外心共线.

By Nirvanacs