2012年第38届俄罗斯数学奥林匹克十一年级试题

1. 开始时桌子上有 111 块等重的橡皮泥, 对桌子上的橡皮泥进行如下操作: 先将橡皮泥中的一部分或全体分成若干组, 每组有相同块数的橡皮泥, 然后将每组中的橡皮泥捏成一块. 已知可以经过 m 次上述操作使得桌子上恰有11块两两重量不同的橡皮泥. 求 m 的最小值.

2. 实数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 中任意两个的差的绝对值不小于 1. 已知存在实数 k 满足: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. 求证: $k^2 \geqslant \dfrac{25}{3}$.

3. 整个平面如国际象棋盘一样用黑色和白色小方格铺满. 现在用红色和蓝色将所有白格染色, 使得原来有公共顶点的白格不同色. 对于平面上任一线段 I, 我们用 $\delta(I)$ 表示 I 上面的红色线段长度之和与蓝色线段长度之和的差. l 是平面上一条与小方格的边不平行的直线. 证明: 存在一个只与 l 有关的常数 C, 使得对任意与 l 平行的线段 I, 都有 $\delta(I) \leqslant C$.

4. 设 $SA_1A_2\cdots A_n$ 是一个以凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 为底的 n 棱锥. 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$, X_i 是底所在平面上的一点满足: $\triangle X_iA_iA_{i+1} \cong \triangle SA_iA_{i+1}$, 且 X_i 与多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 位于直线 A_iA_{i+1} 同侧. 求证: $\triangle X_iA_iA_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的并覆盖多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ (这里 $A_{n+1} = A_1$).

5. 设 $P(x)$ 是一个实系数多项式, 实数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 满足 $a_1a_2a_3 \neq 0$, $P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3), \forall x \in \mathbb{R}$. 求证: $P(x)$ 至少有一个实根.

6. 设 A_1, B_1, C_1 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上的点, 满足 $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. O_A, O_B 和 O_C 分别是 $\triangle AB_1C_1, \triangle A_1BC_1$ 和 $\triangle A_1B_1C$ 的外心. 求证: $\triangle O_AO_BO_C$ 的内心与 $\triangle ABC$ 的内心重合.

7. A 是一个正 $2n+1$ 边形得顶点集, 甲乙两人由甲开始轮流每次去掉 A 中的一个点. 如果某人操作后 A 中剩下的点中任意三点都构成一个钝角三角形的顶点集, 则获胜. 问: 甲乙两人谁有必胜策略?

8. 设 $S_n = 1! + 2! + \cdots + n!$. 证明: 存在正整数 n 使得 S_n 有大于 10^{2012} 的素因数.

By Nirvanacs