2012年第38届俄罗斯数学奥林匹克九年级试题

1. $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ 是不小于 2 的互异正整数, 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 407$. 是否存在正整数 n, 使得当 n 分别除以 $a_1, a_2, \cdots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \cdots, 4a_{11}$ 这 22 个数时所得到的余数的和等于 2012?

2. 已知在正 2012 边形的顶点中, 存在 k 个顶点, 使得以这 k 个顶点为顶点的凸 k 边形的任意两条边不平行. 求 k 的最大值.

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A$ 是钝角. 设 H 是点 A 在直线 BC 上的投影点, $\triangle ABC$ 过顶点 C 的中线的延长线交其外接圆于 K. 求证: K, H, C, D 四点共圆.

4. 正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, k$ 满足: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3k$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 3k^2$, $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 3k^3 + k$. 求证: 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中存在两个数使得它们的差的绝对值大于 1.

5. 101 个智者围坐一圈开圆桌会议讨论地球和木星谁绕谁转的问题. 开始及随后的每个时刻每个智者持有地球绕木星转或木星绕地球转这两种观点之一. 各智者按以下规则每分钟一次同时宣布自己的观点: 除第一次以外, 如果在上一分钟时一个智者的相邻两人(左右各一人)与其观点都不相同, 则智者改变自己的观点, 否则不改变自己的观点. 求证: 若干分钟后, 所有的人都不再改变自己的观点.

6. A_1, B_1, C_1 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上的点, 满足 $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. I_A, I_B 和 I_C 分别是 $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$ 和 $\triangle A_1B_1C$ 的内心. 求证: $\triangle I_AI_BI_C$ 的外心和 $\triangle ABC$ 的内心重合.

7. 开始时黑板上写着 10 个连续的正整数. 对黑板上的数进行如下操作: 任取黑板上的两个数 a 和 b, 将它们用数 $a^2 - 2011b^2$ 和 ab 替换. 经过若干次上述操作后, 黑板上开始时的 10 个数已全部被替换掉, 问此时在黑板上是否可能还是 10 个连续的正整数?

8. 城市里有若干路公共汽车线. 已知任两路公共汽车线恰有一个公共的车站; 任一路公共汽车线至少有 4 站. 求证: 可以将所有的车站分成不交的两组, 使得任意一路公共汽车线含每组中至少一站.

By Nirvanacs