

2012年北约自主招生数学试题

1. 求 x 的范围使得 $|x+2| + |x| + |x-1|$ 是增函数.
2. 求 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 1$ 的实根的个数.
3. 已知 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的 4 个根组成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 求 $|m-n|$.
4. 如果锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O , 求 O 到三角形三边的距离比 (用三角形的角和三角函数表示).
5. 已知点 $A(-2, 0), B(0, 2)$, 若点 C 是圆 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ 上的动点, 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.
6. 在 $1, 2, \dots, 2012$ 中取一组数, 使得任意两数之和不能被其差整除, 最多能取多少个?
7. 设点 A, B, C 分别在边长为 1 的正三角形三边上, 求 $AB^2 + BC^2 + CA^2$ 的最小值.
8. 求使得 $\sin 4x \sin 2x - \sin x \sin 3x = a$ 在 $[0, \pi)$ 有唯一解的 a .
9. 求证: 若圆内接五边形的每个角都相等, 则它为正五边形.
10. 求证: 对任意的正整数 n , $(1 + \sqrt{2})^n$ 必可表示成 $\sqrt{s} + \sqrt{s-1}$ 的形式, 其中 $s \in \mathbb{N}^+$.