2012 年高考理科数学试题选作解

此为预览版，将继续更新，欢迎转载，转载时请帮忙加个链接 http://lukang.me，感激不尽.

1. (全国卷)$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\cos(A-C)+\cos B=1$，$a=2c$，求C.

解答：因为在$\triangle ABC$中，有$A+B+C=\pi$，因此$\cos B=-\cos(A+C)$，于是

$$1=\cos(A-C)+\cos B=\cos(A-C)-\cos(A+C)=2\sin A\sin C.$$

由正弦定理及$a=2c$知，$\sin A=2\sin C$，因此由上式知

$$1=2\sin A\sin C=\sin^2 A,$$

于是$\sin A=1$，即$A=90°$. 从而$\sin C=\dfrac{1}{2}$，而显然有C为锐角，因此$C=30°$.

2. (全国卷)设函数$f(x)=ax+\cos x$，$x\in[0,\pi]$.

(I) 讨论$f(x)$的单调性;

(II)设$f(x)\leqslant 1+\sin x$，求a的取值范围.

解答：(I) 注意到$f'(x)=a-\sin x$，由于$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，因此当$a\geqslant 1$时，$f(x)$恒递增；当$a\leqslant 0$，$f(x)$恒递减；当$0<a<1$时，$f(x)$在$[0,\arcsin a]$及$[\pi-\arcsin a,\pi]$上递增，在$(\arcsin a,\pi-\arcsin a)$上递减.

(II) 令$g(x)=1+\sin x-ax-\cos x$，则$g(x)\geqslant 0$在$[0,\pi]$上恒成立. 令$x=\pi$，则由

$$g(\pi)=1-a\pi+1\geqslant 0\quad\Longrightarrow\quad a\leqslant\frac{2}{\pi}.$$

因此只需考虑$a\leqslant\dfrac{2}{\pi}$. 此时$g'(x)=\sin x+\cos x-a$，而函数$y=\sin x+\cos x$在$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上递增，在$\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$上递减，而$g'(0)=1-a>0$，因此$g'(x)$在$[0,\pi]$上要么恒大于等于0，要么先大于等于0然后恒小于0. 也就是要么$g(x)$恒递增，要么$g(x)$先递增再递减，无论哪种情况$g(x)$总是在边界点$x=0,1$取到最小值. 因此只需满足

$$g(0)\geqslant 0,\quad g(\pi)\geqslant 0,\quad a\leqslant\frac{2}{\pi}$$

即可．解之可得$a \leqslant \dfrac{2}{\pi}$即为所求.

3. (全国卷)函数$f(x) = x^2 - 2x - 3$．定义数列$\{x_n\}$如下：$x_1 = 2$，x_{n+1}是过两点$P(4,5)$、$Q(x_n, f(x_n))$的直线PQ_n与x轴交点的横坐标.

(I) 证明：$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 3$;

(II)求数列$\{x_n\}$的通项公式.

解答: (I) 首先由条件知直线PQ_n的解析式为

$$y = \frac{f(x_n) - 5}{x_n - 4} \cdot (x-4) + 5 = \frac{(x_n+2)(x_n-4)}{x_n - 4}(x-4) + 5 = (x_n+2)(x-4)+5,$$

因此由x_{n+1}为直线PQ_n与x轴交点的横坐标知

$$(x_n+2)(x_{n+1}-4)+5 = 0 \Longrightarrow x_{n+1} = 4 - \frac{5}{x_n+2} = \frac{4x_n+3}{x_n+2}.$$

下面用数学归纳法来证明$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 3$;

由于$x_2 = \dfrac{4\times 2+3}{2+2} = \dfrac{11}{4}$，此时显然有$2 \leqslant x_1 < x_2 < 3$．现在假设当$n = k$时,有$2 \leqslant x_k < x_{k+1} < 3$，于是此时有

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{4x_{k+1}+3}{x_{k+1}+2} - x_{k+1} = \frac{(3-x_{k+1})(x_{k+1}+1)}{x_{k+1}+2} > 0,$$

$$x_{k+2} - 3 = \frac{4x_{k+1}+3}{x_{k+1}+2} - 3 = \frac{x_{k+1}-3}{x_{k+1}+2} < 0.$$

从而可得$2 \leqslant x_{k+1} < x_{k+2} < 3$．由归纳法原理知命题得证.

(II) 因为$x_{n+1} = \dfrac{4x_n+3}{x_n+2}$，所以

$$x_{n+1} - 3 = \frac{x_n-3}{x_n+2} \Longrightarrow \frac{1}{x_{n+1}-3} = \frac{5}{x_n-3} + 1,$$

因此

$$\frac{1}{x_{n+1}-3} + \frac{1}{4} = 5\left(\frac{1}{x_n-3} + \frac{1}{4}\right),$$

于是数列$\left\{\dfrac{1}{x_n-3} + \dfrac{1}{4}\right\}$是首项为$-\dfrac{3}{4}$，公比为5的等差数列，即

$$\frac{1}{x_n-3} + \frac{1}{4} = -\frac{3\cdot 5^{n-1}}{4} \Longrightarrow x_n = \frac{9\cdot 5^{n-1}-1}{3\cdot 5^{n-1}+1}.$$

4. (山东卷)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3 + a_4 + a_5 = 84$，$a_9 = 73$.

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(II)对任意$m \in \mathbb{N}^*$，将数列$\{a_n\}$中落入区间$(9^m, 9^{2m})$内的项的个数记为b_m．求数列$\{b_m\}$的前m项和S_m.

解答：(I) 由于$\{a_n\}$为等差数列，所以$84 = a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4$，于是$a_4 = 28$．因此数列$\{a_n\}$的公差为$d = \dfrac{a_9 - a_4}{9 - 4} = 9$，从而通项公式为$a_n = a_4 + 9(n-3) = 9n+1$.

(II) 易知此时数列$\{a_n\}$中落入区间$(9^m, 9^{2m})$的项为$9^m+1, 9^m+10, \cdots, 9^{2m}-8$，总共有$\dfrac{(9^{2m-1}-8)-(9^m+1)}{9} + 1 = 9^{2m-1} - 9^m$项，即$b_m = 9^{2m-1} - 9^m$．因此

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} 9^{2k-1} - \sum_{k=1}^{m} 9^{k-1} = \frac{9^{2m+1}-9}{80} - \frac{9^m - 1}{8} = \frac{9^{2m+1} - 10 \cdot 9^m + 1}{80}.$$

5. (山东卷)已知函数$f(x) = \dfrac{\ln x + k}{e^x}$($k$为常数，$e = 2.71828\cdots$是自然对数的底数)，曲线$y = f(x)$在$(1, f(1))$处的切线与$x$轴平行.

(I) 求k的值;

(II)求$f(x)$的单调区间;

(III) 设 $g(x) = (x^2+x)f'(x)$，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．证明：对任意 $x > 0$，$g(x) < 1 + e^{-2}$.

解答：(I) 因为 $f'(x) = \dfrac{1}{x}e^{-x} - (k + \ln x)e^{-x} = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - \ln x - k\right)$，由题意知$y = f(x)$在$(1, f(1))$处的切线斜率为0，即$f'(1) = e^{-1}(1-k) = 0$，所以$k = 1$.

(II) 此时$f'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - \ln x - 1\right) = \dfrac{1 - x\ln x - x}{xe^x}$，因为$y(x) = 1 - x\ln x - x$在$x > 0$时递减，而$y(1) = 0$，因此在$1 > x > 0$时，$f'(x) > 0$；在$x \geqslant 1$时，$f'(x) \leqslant 0$．于是$f(x)$在$(0,1)$上递增，在$[1, +\infty)$上递减.

(III) $g(x) = (x^2+x)f'(x) = (1+x)e^{-x}(1 - x\ln x - x)$．设$h(x) = 1 - x\ln x - x$，则$h'(x) = -\ln x - 2$，因此$h'(x)$在$(0, e^{-2})$上恒正，在$(e^{-2}, +\infty)$上恒负．于是$h(x)$的最大

值在$x=e^{-2}$时取到，且最大值为$h(-2)=1+e^{-2}$．又熟知不等式$e^x>1+x$在$x>0$时成立，所以$(1+x)e^{-x}<1$，从而

$$g(x)=(x+1)e^{-x}(1-x\ln x-x)\leqslant(x+1)e^{-x}(1+e^{-2})<1+e^{-2}.$$

6. (江西卷)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+kn$(其中$k\in\mathbb{N}^+$)，且S_n的最大值为 8.

(I) 确定常数k,并求a_n;

(II)求数列$\left\{\dfrac{9-2a_n}{2^n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

解答：(I) 因为$S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+kn=-\dfrac{1}{2}(n-k)^2+\dfrac{k^2}{2}$，由于$k\in\mathbb{N}^+$，因此$k$能够被$n$取到，从而$S_n$的最大值为$\dfrac{k^2}{2}=8$，从而解得$k=4$($k=-4$与$k\in\mathbb{N}^+$不符，故舍去)．因此通项公式为$a_n=S_n-S_{n-1}=-\dfrac{1}{2}n^2+4n+\dfrac{1}{2}(n-1)^2-4(n-1)=\dfrac{9}{2}-n.$

(II) 此时数列$\left\{\dfrac{9-2a_n}{2^n}\right\}$的通项为$\left\{\dfrac{n}{2^{n-1}}\right\}$，因此

$$\begin{aligned}T_n=&2T_n-T_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{2^{k-1}}\\=&2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{n}{2^{n-1}}=2\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^{n-1}}\right)\\=&4-\frac{n+2}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

7. (江西卷)在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c．已知$A=\dfrac{\pi}{4}$，以及

$$b\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)-c\sin\left(\frac{\pi}{4}+B\right)=a.$$

(I) 求证：$B-C=\dfrac{\pi}{2}$;

(II)若$a=\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

解答：(I) 因为$A=\dfrac{\pi}{4}$，由正弦定理知若设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，则有

$$\begin{aligned}2R\sin A=a=&b\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)-c\sin\left(\frac{\pi}{4}+B\right)\\=&2R\sin B\sin(A+C)-2R\sin C\sin(A+B)\\=&R(1-\cos 2B)-R(1-\cos 2C)\\=&2R\sin(B-C)\sin(B+C)=2R\sin(B-C)\sin A\end{aligned}$$

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin(B-C)=1$，又因为$-\pi<B-C<\pi$，所以$B-C=\dfrac{\pi}{2}$.

(II) 此时由$B+C=\frac{3\pi}{4}$及$B-C=\frac{\pi}{2}$知$B=\frac{5\pi}{8}, C=\frac{\pi}{8}$，因此由正弦定理知

$$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sin\frac{5\pi}{8}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

从而$b=2\sin\frac{5\pi}{8}, c=2\sin\frac{\pi}{8}$. 于是$\triangle ABC$的面积为

$$\begin{aligned} S=&\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8}\\ =&\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)\right)\\ =&\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

8. (江西卷)若函数$h(x)$满足: (1)$h(0)=1, h(1)=0$; (2)对任意$a\in[0,1]$，有$h(h(a))=a$; (3)在$(0,1)$上单调递减，则称$h(x)$为补函数．已知函数$h(x)=\left(\frac{1-x^p}{1+\lambda x^p}\right)^{\frac{1}{p}}$ $(\lambda>-1, p>0)$.

(I) 判断函数$h(x)$是否为补函数，并证明你的结论;

(II)若存在$m\in[0,1]$，使$h(m)=m$，称m为函数$h(x)$的中介元. 记$p=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N}^+)$时$h(x)$的中介元为$x_n$，且$S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$. 若对任意的$n\in\mathbb{N}^+$，都有$S_n<\frac{1}{2}$，求$\lambda$的取值范围;

(III)当$\lambda=0$，$x\in(0,1)$时，函数$y=h(x)$的图像总在直线$y=1-x$的上方. 求p的取值范围.

解答: (I) $h(x)$是补函数，证明如下. 首先显然有$h(0)=1, h(1)=0$; 其次我们显然可以得到$h^p(x)=\frac{1-x^p}{1+\lambda x^p}$，因此

$$\begin{aligned} 1-h^p(x)=1-\frac{1-x^p}{1+\lambda x^p}=\frac{(\lambda+1)x^p}{1+\lambda x^p},\\ 1+\lambda h^p(x)=1+\frac{\lambda(1-x^p)}{1+\lambda x^p}=\frac{\lambda+1}{1+\lambda x^p},\end{aligned}$$

两式相除可得$\frac{1-h^p(x)}{1+\lambda h^p(x)}=x^p$，因此对任意$a\in[0,1]$，有

$$h(h(a))=\left(\frac{1-h^p(a)}{1+\lambda h^p(a)}\right)^{\frac{1}{p}}=(a^p)^{\frac{1}{p}}=a.$$

最后，若$\lambda=0$，此时由$p>0$知$h(x)=(1-x^p)^{\frac{1}{p}}$显然在$(0,1)$上递减；如果$\lambda>0$，此时由$1+\frac{1}{\lambda}>0$及$p>0$知$y=1+\lambda x^p$在$(0,1)$上递增且为正知$h(x)=-\frac{1}{\lambda}+\frac{1+\frac{1}{\lambda}}{1+\lambda x^p}$在$(0,1)$上递减；如果$\lambda>0$，此时由$\lambda>-1$知$1+\frac{1}{\lambda}<0$，又$y=1+\lambda x^p$在$(0,1)$上递减且为正知$y=\frac{1}{1+\lambda x^p}$在$(0,1)$上递增，从而$h(x)=-\frac{1}{\lambda}+\frac{1+\frac{1}{\lambda}}{1+\lambda x^p}$在$(0,1)$上递减. 综上所述，总有$h(x)$在$(0,1)$上递减. 于是条件(1)(2)(3)均满足，故$h(x)$为补函数.

(II) 因为$h(x_n)=\left(\frac{1-x_n^{\frac{1}{n}}}{1+\lambda x_n^{\frac{1}{n}}}\right)^n=x_n$，则$\frac{1-x_n^{\frac{1}{n}}}{1+\lambda x_n^{\frac{1}{n}}}=x_n^{\frac{1}{n}}$. 若设$a=x_n^{\frac{1}{n}}$，则有$a\in[0,1]$以及$\frac{1-a}{1+\lambda a}=a$. 因为$x_n=a^n$，且对若对任意的$n\in\mathbb{N}^+$，都有$S_n<\frac{1}{2}$，因此必然有$\frac{a}{1-a}\leqslant\frac{1}{2}$($a=1$明显不符合条件)，解得$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$. 当$\lambda=0$时，此时$a=\frac{1}{2}$，不符合要求；当$\lambda>0$时，此时解得$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}$. 显然$\frac{-1-\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}<0$，故$a=\frac{-1+\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}$，解$\frac{-1+\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}\leqslant\frac{1}{3}$可得$\lambda\geqslant3$；当$\lambda<0$时，此时$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}$. 显然$\frac{-1-\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}>1$，故$a=\frac{-1+\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}$，解$\frac{-1+\sqrt{1+\lambda}}{\lambda}\leqslant\frac{1}{3}$知无符合条件的解. 综上所述，所求$\lambda$的取值范围为$[3,+\infty)$.

(III) 由题意知当$x\in(0,1)$时，恒有$(1-x^p)^{\frac{1}{p}}>1-x$，即$f(x)=1-x^p-(1-x)^p$在$(0,1)$上恒正. 当$p>1$时，此时$f'(x)=p((1-x)^{p-1}-x^{p-1})$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上为正，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上为负，即$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上递增，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上递减，又因为$f(0)=f(1)=0$，因此此时$f(x)$在$(0,1)$上恒正，满足条件；当$p=1$时，此时$f(x)\equiv0$，不符合条件；当$p<1$时，此时类似分析知$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上递减，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上递增，而$f(0)=f(1)=0$，因此因此此时$f(x)$在$(0,1)$上恒负，不符合条件. 综上所述，$p$的取值范围为$(1,+\infty)$.

9. (重庆卷)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{n+1}=a_2\cdot S_n+a_1$且$a_2\neq0$.

(I) 求证数列$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列;

(II)若$a_2>-1$，求证$S_n\leqslant\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，且给出等号成立的充要条件.

解答：(I) 令$n=1$，则由$S_2=a_2\cdot a_1+a_1$，即$a_1+a_2=a_2\cdot a_1+a_1$，所以$a_2(a_1-1)=0$，因为$a_2\neq0$，所以$a_1-1=0$，即$a_1=1$. 又有$S_n=a_2\cdot S_{n-1}+a_1$，所以$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(a_2\cdot S_n+a_1)-(a_2\cdot S_{n-1}+a_1)=a_2\cdot a_n$，因为$a_2\neq0$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列.

(II) 当$x>-1$时，对正整数k,n满足$k<n$，此时有

$$1+x^n-x^k-x^{n-k}=(1-x^k)(1-x^{n-k}),$$

当$0\geqslant x>-1$时，此时$|x|\leqslant1$，因此必有$1-x^k>0,1-x^{n-k}>0$，于是

$$1+x^n-x^k-x^{n-k}=(1-x^k)(1-x^{n-k})\geqslant0;$$

当$x>0$时，易知$1-x^k$与$1-x^{n-k}$同号，因此也有

$$1+x^n-x^k-x^{n-k}=(1-x^k)(1-x^{n-k})\geqslant0.$$

综上所述，总有$1+x^n-x^k-x^{n-k}\geqslant0$，即$1+x^n\geqslant x^k+x^{n-k}$且等号成立当且仅当$x=1$.

现在回到原题，由(I)知此时$a_n=a_2^{n-1}$，因此利用$a_2>-1$及上述结论知当$n>1$时有

$$\begin{aligned}2S_n&=\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{n+1-i})=\sum_{i=1}^{n}(a_2^{i-1}+a_2^{n-i})\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}(1+a_2^{n-1})=n(1+a_2^{n-1})=n(a_1+a_n)\end{aligned}$$

于是$S_n\leqslant\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，等号成立当且仅当$a_2=1$. 又当$n=1$时，此时$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$恒成立. 综上所述，不等式得证.

10. (广东卷)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$，$n\in\mathbb{N}^+$，且a_1，a_2+5，a_3成等差数列.

(I) 求a_1的值;

(II)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(III)证明：对一切正整数n，有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

解答: (I) 由题目条件我们可得

$$\begin{cases} 2a_1 = a_2 - 4 + 1 = a_2 - 3 \\ 2(a_1 + a_2) = a_3 - 8 + 1 = a_3 - 7 \\ a_1 + a_3 = 2(a_2 + 5) \end{cases}$$

解之得$a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 19$.

(II) 由于$2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$, $2S_{n-1} = a_n - 2^n + 1$, 两式相减可得

$$2a_n = 2(S_n - 2S_{n-1}) = a_{n+1} - a_n - 2^n,$$

于是$a_{n+1} = 3a_n + 2^n$, 由此得$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$. 因此$\{a_n + 2^n\}$为首项为3, 公比为3的等比数列, 于是$a_n + 2^n = 3^n$, 从而$a_n = 3^n - 2^n$.

(III) 注意到, 当$n \geqslant 2$时, $3^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 2^n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n$, 因此此时有$a_n = 3^n - 2^n > 2^n$, 于是

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2}.$$

11. (上海卷)有一集合$A = \{-1, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 其中$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. 令集合$P = \{\overrightarrow{a} = (s,t) | s, t \in A\}$, 若对任意的$a \in P$, 都存在另一个向量$a' \in P$, 使得$a$与$a'$的数量积是 0. 那么称集合$A$具有性质$P$. 现在设集合$A$有性质$P$,

(I) 设$x > 2$, $A = \{-1, 1, 2, x\}$, 求一切可能的x;

(II)$A = \{-1, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 若$1 \in A$且$x_n > 1$, 求证: $x_1 = 1$;

(III)对于$A = \{-1, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $x_1 = 1$, $x_2 = q$, 求数列$\{x_k\}$的通项公式.

解答: (I) 取$(2, x)$, 则由条件知存在$a, b \in A$, 使得$2a + xb = 0$. 若a, b都不为-1, 则$a, b > 0$, 此时有$2a + xb > 0$矛盾. 若$a = -1$, 则$b \neq -1$, 于是$b > 1$, 此时有$x < bx = 2$矛盾. 故$b = -1$, 于是$2a - x = 0$. 因为$x = 2a > 2$, 所以$a > 1$, 又$a = \frac{x}{2} < x$, 因此a只能为2, 即$a = \frac{x}{2} = 2$, 从而$x = 4$.

(II) 如若不然, 则由$0 < x_1 < 1$, 取(x_1, x_n), 则此时存在$a, b \in A$, 使得$ax_1 + bx_n = 0$. 类似(I)可得a, b必有一者为-1. 若$a = -1$, 则$-x_1 + bx_n = 0$, 可得$0 < b = \frac{x_1}{x_n} < x_1$.

这与x_1的最小性矛盾. 若$b=-1$, 则$ax_1-x_n=0$, 可得$a=\dfrac{x_n}{x_1}>x_n$, 这与x_n的最大性矛盾. 综上所述, 反设不成立, 因此$x_1=1$.

(III)用归纳法证明$x_k=q^{k-1}$. 显然当$k=1,2$时, 命题成立. 现在假设已知当$1\leqslant m\leqslant k$时, 均有$x_m=q^{m-1}$. 取(x_k,x_{k+1}), 则由条件, 存在$a,b\in A$, 使得$ax_k+bx_{k+1}=0$.类似(I)可得a,b必有一者为-1. 若$a=-1$, 则$bx_{k+1}=x_k$, 可得$0<b=\dfrac{x_k}{x_{k+1}}<1$,这与$x_1$的最小性矛盾. 若$b=-1$, 则$ax_k-x_{k+1}=0$, 可得$1<a=\dfrac{x_{k+1}}{x_k}\leqslant x_k$. 又因为$a\in A$, 所以$a=q^s$, 其中$s\in\{1,2,\cdots,k-1\}$, 于是$x_{k+1}=q^{k+s}$. 如果$s>1$, 则取$(q,x_{k+1})$, 类似上述过程知存在$c\in A$使得$cq=x_{k+1}$, 即$c=q^{k+s-1}$, 易知$q^{k-1}=x_k<c<x_{k+1}=q^{k+s}$, 矛盾. 因此$s=1$, 即$x_{k+1}=q^k$. 综上所述, 数列$\{x_k\}$的通项公式为$x_k=q^{k-1}$.

12. (安徽卷)设函数$f(x)=ae^x+\dfrac{1}{ae^x}+b\ (a>0)$.

(I) 求$f(x)$在$[0,+\infty)$内的最小值;

(II)设曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程为$y=\dfrac{3}{2}x$, 求a,b的值.

解答: (I) 当$a>1$时, 此时$y=ae^x$在$[0,+\infty)$的值域为$[a,+\infty)$, 而$g(x)=x+\dfrac{1}{x}+b$在$(0,1)$上递减, 在$[1,+\infty)$上递增. 因此$f(x)=g(ae^x)$在$[0,+\infty)$上递增, 从而$f(x)$在$[0,+\infty)$内的最小值为$f(0)=a+\dfrac{1}{a}+b$; 当$0<a\leqslant 1$时, 此时类似可得$f(x)=g(ae^x)$在$[0,-\ln a)$上递减, 在$[-\ln a,+\infty)$上递增, 因此$f(x)$在$[0,+\infty)$内的最小值为$f(-\ln a)=2+b$.

(II) 因为$f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{ae^x}$, 因此曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线斜率为$f'(2)=\dfrac{3}{2}$, 即$ae^2-\dfrac{1}{ae^2}=\dfrac{3}{2}$, 由于$a>0$, 故可得唯一解$a=2e^{-2}$. 于是此时的切线方程为$y=\dfrac{3}{2}(x-2)+f(2)$, 因此$f(2)=3$, 代入可得

$$3=f(2)=ae^2+\frac{1}{ae^2}+b=2+\frac{1}{2}+b,$$

所以$b=\dfrac{1}{2}$.

13. (安徽卷)数列$\{x_n\}$满足$x_1=0$, $x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c\ \ (n\in\mathbb{N}^+)$.

(I) 证明: $\{x_n\}$是递减数列的充分必要条件是$c<0$;

(II)求c的取值范围, 使$\{x_n\}$是递增数列.

解答: (I) 若$\{x_n\}$是递减数列, 则$x_2=c<x_1=0$知$c<0$; 反过来, 如果$c<0$, 则此时由$x_{n+1}-x_n=c-x_n^2<0$知$\{x_n\}$是递减数列. 综上所述, $\{x_n\}$是递减数列的充分必要条件是$c<0$.

(II) 所求的c的范围为$0<c\leqslant\dfrac{1}{4}$. 首先若$\{x_n\}$是递增数列, 则必须$c=a_2>a_1=0$. 下面我们证明当$0<c\leqslant\dfrac{1}{4}$时, $\{x_n\}$是递增数列. 我们归纳证明$0\leqslant x_n<\sqrt{c}$. 当$n=1$时, 命题明显成立. 若$0\leqslant x_n<\sqrt{c}$, 则此时$x_n<\sqrt{c}\leqslant\dfrac{1}{2}$, 因此利用$f(x)=-x^2+x+c$的单调性知$x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c<-(\sqrt{c})^2+\sqrt{c}+c<\sqrt{c}$, 又$x_{n+1}\geqslant c-x_n^2>0$. 于是归纳证明得对任意的正整数$n$, 有$0\leqslant x_n<\sqrt{c}$. 于是$x_{n+1}-x_n=c-x_n^2>0$, 从而$\{x_n\}$是递增数列. 最后证明$c>\dfrac{1}{4}$时, $\{x_n\}$不是递增数列. 假设此时$\{x_n\}$是递增数列, 则必有$x_n\leqslant\dfrac{1}{2}$, 否则若$x_n>\dfrac{1}{2}$, 此时由递增知$x_{n+1}>\dfrac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}x_{n+2}-x_{n+1}=&(-x_{n+1}^2+x_{n+1}+c)-(-x_n^2+x_n+c)\\=&(x_{n+1}-x_n)(1-x_{n+1}-x_n)\end{aligned}$$

而由$\{x_n\}$递增, 所以$x_{n+2}-x_{n+1}>0$, $x_{n+1}-x_n>0$, $1-x_{n+1}-x_n<0$, 这说明正数等于负数, 矛盾. 因此$x_n\leqslant\dfrac{1}{2}$, 于是此时有$x_{n+1}-x_n=c-x^n>c-\dfrac{1}{4}$. 容易用数学归纳法证得$x_n>(n-1)\left(c-\dfrac{1}{4}\right)$, 当$n$足够大时, 可使得$x_n>\dfrac{1}{2}$, 由前面的推理知矛盾. 综上所述, 当且仅当$0<c\leqslant\dfrac{1}{4}$时, $\{x_n\}$是递增数列.