第53届国际数学奥林匹克中国国家队选拔集训讲座

1. 已知正实数 x, y, z 满足 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$，证明：

$$\sum_{cyc} \frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq 1\ .$$

2. 已知 $n \in \mathbb{N}^+, n \geq 3$，非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，这里 $x_{n+1}=x_1$，证明：
(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-2)x_i+x_{i+1}}{1-x_i^2} \geq \frac{n^2}{n+1}$；(2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+1}}{1-x_i^2} \geq \frac{2n^2}{n^2-1}$.

3. 已知 $n \in \mathbb{N}^+, n \geq 3$，实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$x_n > x_{n-1} > \cdots > x_2 > x_1\ ,$$

证明：

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right)\ .$$

4. 已知 $n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$a_i^2 + a_{i+1}^2 \leq 1 (i=1,2,\cdots,n-1)\ ,$$

求 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的最大值 .

5. 已知 $x, y, z > 0$ 且 $xyz=1$，求

$$(x+y+z)\left(6-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$$

的最大值 .

6. 已知 m, n 为整数，且 $n > m > 1$，如果 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 及 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，求 $\sum_{i=1}^{m} x_i^2$ 的最大值 .

7. 已知正实数 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 满足 $x_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} x_n^j$, 其中 $n=1,2,3,\cdots$. 证明：对一切正整数 n，都有 $2-\frac{1}{2^{n-1}} \leq x_n < 2-\frac{1}{2^n}$.

8. 已知实数 a, b, c, x, y, z 满足

$$(a+b+c)(x+y+z)=3\,,$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4\,.$$

证明 : $ax+by+cz\geq 0$.

9. 已知正实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, 证明 :

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b}}\geq\frac{3}{2}\,.$$

10. 已知 $n\in\mathbb{N}^+, n\geq 2$, 非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\,,\ \sum_{i=1}^{n}a_i=1\,,$$

求 $a_1a_2^2+a_2a_3^2+\cdots+a_{n-1}a_n^2+a_na_1^2$ 的最大值 .