2012全国高中数学联赛甘肃省预赛预赛参考答案

(满分120分)

一、 填空题（每小题7分，共56分）

1、$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　2、2　　3、15　　4、$(\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$

5、36　　6、$\frac{1}{2^{1006}}$　　7、$x+1$　　8、$\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、解答题

说明：以下评分标准仅供参考，其他正确答案请参照以下给分点平行给分

9、（14分）已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，且$a_2=6$.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ) 设$b_n=\frac{a_n}{n+c}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，$c$为非零常数，若数列$\{b_n\}$是等差数列，记$c_n=\frac{b_n}{2^n}$，$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，求$S_n$.

解：(Ⅰ) 由已知$\frac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)\Rightarrow(n-1)a_{n+1}-(n+1)a_n=-(n+1)$

当$n\geq2,n\in\mathrm{N}^*$时，$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n-1}=-\frac{1}{n-1}$，

进一步得：$\frac{a_{n+1}}{(n+1)n}-\frac{a_n}{n(n-1)}=-\frac{1}{n(n-1)}=-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

从而有：$\frac{a_{n+1}}{(n+1)n}-\frac{a_2}{2}=-\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$

$=\frac{1}{n}-1$

又$a_2=6$，当$n\geq2$时，$a_{n+1}=(n+1)(2n+1)$，即当$n\geq3$时，$a_n=n(2n-1)$.

$a_2=6$符合上式

由$a_2=6$代入及$(1-1)a_2-(1+1)a_1=-(1+1)\Rightarrow a_1=1$，亦合上式.

故对任意$n\in\mathrm{N}^*$，$a_n=n(2n-1)$ ……………………8分

(Ⅱ) 由$b_n=\frac{a_n}{n+c}=\frac{n(2n-1)}{n+c}$知$b_1=\frac{1}{1+c},b_2=\frac{6}{2+c},b_3=\frac{15}{3+c}$，又由于数列$\{b_n\}$是等差数列，所以

$2b_2=b_1+b_3$，$\frac{12}{2+c}=\frac{1}{1+c}+\frac{15}{3+c}$，得$c=-\frac{1}{2}$，从而$b_n=2n$，

进一步得：$c_n=\frac{b_n}{2^n}=\frac{2n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$,

$S_n=1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$　①　　$2S_n=2+\frac{2}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{4}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-3}}+\frac{n}{2^{n-2}}$　②

两式相减得：$S_n=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$ ……………………14分

10、（14分）M是抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线上任意点，过M点作抛物线的切线l_1、l_2，切点分别为A、B（A在x轴上方）

（1）证明：直线AB过定点

（2）设AB的中点为P，求$|MP|$的最小值

解：则由$y=\sqrt{2px}$,知l_1的斜率为$k_1=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_1}}$；由$y=-\sqrt{2px}$知$l_2$的斜率为$k_2=-\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_2}}$

设 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)

则 $l_1: y-y_1=\dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_1}}(x-x_1)$；$l_2: y-y_2=\dfrac{-\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_2}}(x-x_2)$， 两式相减得

$y_1-y_2=-\dfrac{\sqrt{2p}}{2}\dfrac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}x+\dfrac{\sqrt{2p}}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$

又 $y_1-y_2=\sqrt{2p}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$，从而

$1=-\dfrac{1}{2\sqrt{x_1x_2}}x+\dfrac{1}{2}$ 即 $\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{p}{2}$

设过 A,B 的直线为 $y=kx+m$ 代入 $y^2=2px$ 得 $k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0$

则 $x_1x_2=\dfrac{m^2}{k^2}$，从而 $\dfrac{m^2}{k^2}=\dfrac{p^2}{4}\Rightarrow\dfrac{m}{k}=-\dfrac{p}{2}$，则以图可知直线 AB 过焦点……………………8 分

（2）$k_1k_2=-\dfrac{2p}{4\sqrt{x_1x_2}}=-1\Rightarrow l_1\perp l_2$

则 $MP=\dfrac{1}{2}AB,(MP)_{\min}=(\dfrac{1}{2}AB)_{\min}=p$ ……………………14 分

11、（18 分）设 a,b,c 为正实数，且 $a+b+c=1$，求证： $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\right)\geq\dfrac{1}{2}$.

证明：由排序不等式，有

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

$a^2+b^2+c^2\geq ac+ba+cb$ ……………………6 分

两式相加，有

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)$……………………9 分

上式两端同乘 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$，有

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)\geq\left[a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)\right]$……………………12 分

$\geq\left(a+b+c\right)^2=1$……………………15 分

从而有 $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\right)\geq\dfrac{1}{2}$ ……………………18 分

12、（18 分）某校数学兴趣小组由 m 位同学组成，学校专门安排 n 位老师作为指导教师. 在该小组的一次活动中，每两位同学之间相互为对方提出一个问题, 每位同学又向每位指导教师各提出一个问题，并且每位指导教师也向全组提出一个问题，以上所有问题互不相同，这样共提出了 51 个问题. 试求 m,n 的值.

解：则有 $m(m-1)+mn+n=51$．　……………………6 分

化简得 $m^2+(n-1)m+n-51=0$

故 $\Delta=(n-1)^2-4(n-51)=n^2-6n+205=(n-3)^2+196$

∵ $m\in N^*$,∴ Δ 必为完全平方数……………………9 分

设 $(n-3)^2+196=k^2$ (k 为自然数)，则 $(n-3+k)(n-3-k)=-196$……………………12 分

其中 $n-3+k$ 与 $n-3-k$ 具有相同的奇偶性，且 $n-3+k\geqslant n-3-k$

∴ $\begin{cases} n-3+k=2 \\ n-3-k=-98 \end{cases}$ (1) 或 $\begin{cases} n-3+k=98 \\ n-3-k=-2 \end{cases}$ (2) 或 $\begin{cases} n-3+k=14 \\ n-3-k=-14 \end{cases}$ (3) ……………………15 分

由（1）得 $n=-45$,（舍）

由(2)得 $n=51$,此时原方程为 $m^2+50m=0$ 解得 $m_1=-50, m_2=0$（舍）

由（3）得 $n=3$, 此时原方程为 $m^2+2m-48=0$, 解得 $m_1=6, m_2=-8$（舍）

∴ $m=6, n=3$…………………….18 分