二〇一二年全国高中数学联赛甘肃预赛试卷

(2012 年 6 月 24 日上午 9:00-11:30)

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">一</td><td colspan="4">二</td><td rowspan="2">总成绩</td></tr>
<tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>评卷人</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>复核人</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

考生注意：1、本试卷共两大题(12 道小题)，全卷满分 120 分.

2、用钢笔、签字笔或圆珠笔作答.

3、解题书写不要超出装订线.

4、不能使用计算器.

一、填空题（ 本题满分 56 分，每小题 7 分）

得分	评卷人

本题共有 8 小题，请将正确答案直接写在横线上。

1. 空间四点 A，B，C，D 两两间的距离均为1，点 P 与点 Q 分别在线段 AB 与 CD 上运动，则点 P 与点 Q 间的最小距离为___________；

2. 向量 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1)$，$O$ 为坐标原点，动点 $P(x,y)$ 满足 $\begin{cases}0\le\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OA}\le 1\\0\le\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OB}\le 2\end{cases}$，则点 $Q(x+y,y)$ 构成的图形的面积为___________；

3. 设有非空集合 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$, 且当 $a\in A,$ 时，必有 $8-a\in A,$ 这样的集合 A 的个数是

______；

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x-[x], x\le 0\\ f(x-1), x>0\end{cases}$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若 $f(x)=kx+k(k>0)$ 有三个不同的实数根，则实数 k 的取值范围是________；

5. 11位数的手机号码，前七位数字是1390931，若余下的4个数字只能是1、3、5且都至少出现 1 次，这样的手机号码有______个；

6. 若 $\tan x_1 \bullet \tan x_2 \bullet \cdots \bullet \tan x_{2012}=1$，则 $\sin x_1 \bullet \sin x_2 \bullet \cdots \bullet \sin x_{2012}$ 的最大值是______；

7. 设函数 $f:R\to R$，满足 $f(0)=1$ 且对任意 $x,y\in R$ 都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$________；

8. 实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $xy+yz$ 的最大值为______.

二、解答题（本题满分 64 分，第 9、10 题每题 14 分，第 11、12 题每题 18 分）

得分	评卷人

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$,且$a_2=6$.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ) 设$b_n=\dfrac{a_n}{n+c}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，$c$为非零常数，若数列$\{b_n\}$是等差数列，记$c_n=\dfrac{b_n}{2^n},S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，求$S_n$.

得分	评卷人

10. M 是抛物线 $y^2 = 2px(p>0)$ 的准线上任意点，过 M 点作抛物线的切线 l_1、l_2， 切点分别为 A、B（A 在 x 轴上方）.

（1）证明：直线 AB 过定点；

（2）设 AB 的中点为 P，求 $|MP|$ 的最小值.

得分	评卷人

11. 设a,b,c为正实数，且$a+b+c=1$，求证：

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{1}{2}.$$

得分	评卷人

12. 某校数学兴趣小组由m位同学组成，学校专门安排n位老师作为指导教师. 在该小组的一次活动中，每两位同学之间相互为对方提出一个问题，每位同学又向每位指导教师各提出一个问题，并且每位指导教师也向全组提出一个问题，以上所有问题互不相同，这样共提出了51个问题. 试求m，n的值.