空念数学杂志
2012年 第 1 卷 第 4 期 56–59

2012华中科技大学考研高等代数试题参考解答

1. 设 $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 求 D 的所有代数余子式之和 .

解答. 注意到 D 的最后一列全为 1 , 因此

$$A_{1k} + A_{2k} + \cdots + A_{nk} = 0\,, \quad 其中 k = 1, 2, \cdots, n-1$$

以及

$$A_{1n} + A_{2n} + \cdots + A_{nn} = |D| = 1\,.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} = 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 = 1\,,$$

即 D 的所有代数余子式之和为 1 . ■

2. 设 A 为 n 阶实方阵 , 证明 : $\mathrm{r}(A'A) = \mathrm{r}(AA') = \mathrm{r}(A)$, 其中 A' 为 A 的转置 .

证明. 我们只需要证明 $A'Ax = 0$ 和 $Ax = 0$ 同解 . 首先如果 x 满足 $Ax = 0$, 则必有 $A'Ax = 0$, 于是 $Ax = 0$ 的解都是 $A'Ax = 0$ 的解 . 反过来 , 设 x 满足 $A'Ax = 0$, 则 $x'A'Ax = 0$. 如果令 $Ax = y$, 其中 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 则 $y'y = 0$, 即

$$y'y = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 0$$

于是 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, 即 $y = 0$. 因此如果 x 满足 $A'Ax = 0$ 必然有 $Ax = 0$, 即 $A'Ax = 0$ 的解都是 $Ax = 0$的解 . 综上所述 , $A'Ax = 0$ 和 $Ax = 0$同解 , 于是 $\mathrm{r}(A'A) = \mathrm{r}(A)$. 同理可得 $\mathrm{r}(AA') = \mathrm{r}(A)$.
综上所述有 $\mathrm{r}(A'A) = \mathrm{r}(AA') = \mathrm{r}(A)$. ■

3. 已知 $P = \begin{pmatrix} A & I \\ I & I \end{pmatrix}$, 证明 P 可逆的充要条件是 $I - A$ 可逆 , 并在 $(I - A)^{-1}$ 已知的情形下求 P^{-1} .

证明. 因为

$$\begin{pmatrix} A & I \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

所以 $|P| = |A-I|$，因此 P 可逆等价于 $|P| \neq 0$ 等价于 $|A-I| \neq 0$ 等价于 $I-A$ 可逆．注意到

$$\begin{pmatrix} A-I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

因此

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ (I-A)^{-1} & I-(I-A)^{-1} \end{pmatrix},$$

因此所求 P^{-1} 为 $\begin{pmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ (I-A)^{-1} & I-(I-A)^{-1} \end{pmatrix}$. ■

4. 已知 A, B, C, D 为线性空间 V 上的线性变换，且两两可互相交换，并有 $AC + BD = E$．证明：$\ker AB = \ker A \oplus \ker B$．

证明. 先证明 $\ker A \cap \ker B = 0$，设 $x \in \ker A \cap \ker B$，则有 $Ax = Bx = 0$．又由 A, B, C, D 两两可互相交换，所以

$$x = ACx + BDx = CAx + DBx = 0 + 0,$$

因此 $\ker A \cap \ker B = 0$．

再证 $\ker AB = \ker A + \ker B$．首先由 A, B 可交换，所以任取 $x \in \ker A$，有 $ABx = BAx = 0$，因此 $x \in \ker AB$，于是 $\ker A \subseteq \ker AB$; 同理可得 $\ker B \subseteq \ker AB$，所以 $\ker AB \supseteq \ker A + \ker B$．又任取 $x \in \ker AB$，此时有 $BACx = CABx = 0$，所以 $ACx \in \ker B$；同理有 $BDx \in \ker A$．所以由 $AC + BD = E$ 知

$$x = ACx + BDx \in \ker B + \ker A = \ker A + \ker B,$$

从而 $\ker AB \subseteq \ker A + \ker B$．因此有 $\ker AB = \ker A + \ker B$．

综上所述有 $\ker AB = \ker A \oplus \ker B$． ■

5. 求正交变换化 $xy + yz + zx = 1$ 为标准方程，并指出曲面类型．

解答. 方程 $xy+yz+zx=1$ 可化为 $2xy+2yz+2zx=2$，于是可转化为二次型 $x'Ax=2$，其中

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

易求得 A 的特征方程为 $f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$.
当 $\lambda=-1$ 时，可求得 $(-I-A)x=0$ 的两个互相正交的单位长度的解为

$$\left(\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt6}{3},\frac{\sqrt6}{6}\right)',\ \left(\frac{\sqrt2}{2},0,-\frac{\sqrt2}{2}\right)'.$$

当 $\lambda=2$ 时，可求得 $(2I-A)x=0$ 的一个单位长度解为 $\left(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)'$. 因此若令

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt6}{3}&0\\\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \text{令 } P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt6}{3}&0\\\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}.$$

则 P 为正交矩阵，且有 $AP=P\mathrm{diag}\{2,-1,-1\}$. 若记 $y=(\alpha,\beta,\gamma)'$，此时

$$x'Ax=y'P'APy=y'\mathrm{diag}\{2,-1,-1\}y=2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=2,$$

因此 $xy+yz+zx=1$ 的标准方程为 $\alpha^2-\frac{\beta^2}{2}-\frac{\gamma^2}{2}=1$ 为双叶双曲面 . ■

6. 已知 A,B 为实对称矩阵 .
   (a) 若 A,B 正定，且 $AB=BA$，证明 AB 正定 .
   (b) 若 A,B 半正定，证明 $A+B$ 半正定，若还有 A 正定，则 $A+B$ 也正定 .

证明. (a) 因为 $AB=BA$，所以 $(AB)'=B'A'=BA=AB$，即 AB 为实对称矩阵 . 另外，由 A 正定，于是存在正交矩阵 P 使得

$$A=P'\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P\ ,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$. 于是可令 $S=P'\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\}P$，则 $A=S^2$ 且 S 可逆对称 . 因此 $AB=S^2B$ 相似于 $S^{-1}(S^2B)S=SBS$，而由 B 正定及 SBS 与 B 合同，即 SBS 的特征值都是正数，从而 AB 的特征值都是

正数．又因为 AB 为实对称矩阵，所以 AB 正定．
(b) 任取 $x \in \mathbb{R}^n$，因为 A, B 正定，所以 $x'Ax \geqslant 0, x'Bx \geqslant 0$，因此

$$x'(A+B)x = x'Ax + x'Bx \geqslant 0\,.$$

又由 A, B 实对称显然可得 $A+B$ 实对称，所以 $A+B$ 半正定．
若此时 A 正定，则如果 $x \neq 0$，有 $x'Ax > 0$，此时

$$x'(A+B)x = x'Ax + x'Bx > 0\,,$$

因此对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $x \neq 0$ 有 $x'(A+B)x > 0$，从而 $A+B$ 正定． ■

7. 已知 V 为实数域上 $2n+1$ 维线性空间，f, g 为 V 上的线性变换，且 $fg = gf$，求证：存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，$\nu \in V$ 且 $\nu \neq 0$ 使得 $f(\nu) = \lambda\nu, g(\nu) = \mu\nu$．

证明. 由空间第一分解定理[1]及实系数多项式虚根成对出现知 f 必然有一个奇数维实的根子空间 W，则 W 为 f 的不变子空间．设此根子空间对应特征值 $\lambda \in \mathbb{R}$，维数为 k．注意到 $fg = gf$，所以 $(\lambda I - f)^k g = g(\lambda I - f)^k$．于是任取 $x \in W$，有

$$(\lambda I - f)^k(g(x)) = g((\lambda I - f)^k(x)) = g(0) = 0\,,$$

因此 $g(x) \in W$，从而 W 也是 g 的不变子空间．因此将 f, g 限制在 W 上仍然都是奇数维线性空间上的线性变换，于是只需要在 W 中去看问题，问题可以转化为
V 为实数域上 $2n+1$ 维线性空间，f, g 为 V 上的线性变换，且 $fg = gf$，f 的特征值全部为 $\lambda \in \mathbb{R}$，则存在 $\mu \in \mathbb{R}$，$\nu \in V$ 且 $\nu \neq 0$ 使得 $f(\nu) = \lambda\nu, g(\nu) = \mu\nu$．
考虑 g，因为 g 的特征多项式为 $2n+1$ 维实多项式必然有实根，不妨设之为 μ．若记 μ 对应的 g 的特征子空间为 N，则任取 $x \in N$，有 $g(x) = \mu x$，从而

$$g(f(x)) = f(g(x)) = f(\mu x) = \mu f(x)\,,$$

因此 $f(x) \in N$，即 N 是 f 的不变子空间．于是由 f 的特征值全部为 λ 知，若将 f 限制在 N 上，则 f 必在 N 中存在特征向量 ν 使得 $f(\nu) = \lambda\nu$．又由 ν 为特征向量及 $\nu \in N$ 知 $\nu \neq 0$ 且 $g(\nu) = \mu\nu$．综上所述，命题得证． ■

[1]请参考中科大《线性代数》第六章