

2012年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克试题

1. 假定数量有限的男孩和女孩若干, 一组喜欢交际的男孩是指这样一组男孩, 即每个女孩认识该组中至少1个男孩; 而一组爱交际的女孩是指这样一组女孩, 即每个男孩认识该组中至少1个女孩. 请证明: 爱交际男孩的组数和爱交际女孩的组数具有相同的奇偶性 (假设相识是相互的).
2. 假定有一个非等腰三角形 ABC , D 、 E 、 F 分别表示边 BC , CA , 和 AB 的中点. 圆 BCF 和线段 BE 在 P 点再次相交, 圆 ABE 和线段 AD 在 Q 点再次相交, 最后, 线段 DP 和 FQ 在 R 点相交. 请证明三角形 ABC 的重心 G 位于圆 PQR 上.
3. 将每个正整数用红色或蓝色标示, 定义函数 $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, 具有以下两个性质:
 α . 如果 $x \leq y$, 那么 $f(x) \leq f(y)$;
 β . 如果 x, y 和 z 是相同颜色的 (不一定是不同的) 正整数, 且 $x + y = z$, 那么 $f(x) + f(y) = f(z)$.
请证明: 存在一个正数 a , 使对于所有的正整数 x , 有 $f(x) \leq ax$.