

2012年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克试题

1. 假定数量有限的男孩和女孩若干, 一组喜欢交际的男孩是指这样一组男孩, 即每个女孩认识该组中至少一个男孩; 而一组爱交际的女孩是指这样一组女孩, 即每个男孩认识该组中至少一个女孩. 请证明: 爱交际男孩的组数和爱交际女孩的组数具有相同的奇偶性 (假设相识是相互的).
2. 假定有一个非等腰三角形 ABC , D 、 E 、 F 分别表示边 BC , CA , 和 AB 的中点. 圆 BCF 和线段 BE 在 P 点再次相交, 圆 ABE 和线段 AD 在 Q 点再次相交, 最后, 线段 DP 和 FQ 在 R 点相交. 请证明三角形 ABC 的重心 G 位于圆 PQR 上.
3. 将每个正整数用红色或蓝色标示, 定义函数 $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, 具有以下两个性质:
 α . 如果 $x \leq y$, 那么 $f(x) \leq f(y)$;
 β . 如果 x, y 和 z 是相同颜色的 (不一定是不同的) 正整数, 且 $x + y = z$, 那么 $f(x) + f(y) = f(z)$.
请证明: 存在一个正数 a , 使对于所有的正整数 x , 有 $f(x) \leq ax$.
4. 证明有无穷多个正整数 n , 使得 $2^{2^n} + 1$ 能被 n 整除, 而 $2n + 1$ 不能被 n 整除.
5. 假定一个正整数 $n \geq 3$, 将一个 $n \times n$ 方阵的每个单元格涂上 $\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ 中的一种颜色, 且每种颜色至少使用一次. 请证明有某个 1×3 或 3×1 的子矩阵, 其中 3 个单元格被涂上 3 种不同的颜色.
6. 在 $\triangle ABC$ 中, I 和 O 分别表示其内心和外心. ω_A 是通过 B 和 C 的圆, 且与三角形 ABC 的内切圆相切. 圆 ω_B 和 ω_C 的定义类似. 圆 ω_B 和 ω_C 在与 A 点不同的 A' 点相交. B' 和 C' 点的定义类似. 请证明线段 AA' , BB' , CC' 与线段 IO 四线共点.