2012年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克试题

1. 假定数量有限的男孩和女孩若干，一组喜欢交际的男孩是指这样一组男孩，即每个女孩认识该组中至少一个男孩；而一组爱交际的女孩是指这样一组女孩，即每个男孩认识该组中至少一个女孩．请证明：爱交际男孩的组数和爱交际女孩的组数具有相同的奇偶性（假设相识是相互的）.

2. 假定有一个非等腰三角形 ABC，D、E、F分别表示边 BC，CA，和 AB 的中点．圆 BCF 和直线 BE 在 P 点再次相交，圆 ABE 和直线 AD 在 Q 点再次相交，最后，直线 DP 和 FQ 在 R 点相交．请证明三角形 ABC 的重心 G 位于圆 PQR 上．

3. 将每个正整数用红色或蓝色标示，定义函数 $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}^+$，具有以下两个性质:
α．如果 $x\leqslant y$，那么 $f(x)\leqslant f(y)$；
β．如果 x，y 和 z 是相同颜色的（不一定是不同的）正整数，且 $x+y=z$，那么 $f(x)+f(y)=f(z)$．
请证明：存在一个正数 a，使对于所有的正整数 x，有 $f(x)\leqslant ax$．

4. 证明有无穷多个正整数 n，使得 $2^{2^n}+1$ 能被 n 整除，而 $2n+1$ 不能被 n 整除．

5. 假定一个正整数 $n\geqslant 3$，将一个 $n\times n$ 方阵的每个单元格涂上 $\left[\dfrac{n+2}{3}\right]$ 中的一种颜色，且每种颜色至少使用一次．请证明有某个 1×3 或 3×1 的子矩阵，其中 3 个单元格被涂上 3 种不同的颜色．

6. 在 $\triangle ABC$ 中，I 和 O 分别表示其内心和外心．ω_A 是通过 B 和 C 的圆，且与三角形 ABC 的内切圆相切．圆 ω_B 和 ω_C 的定义类似．圆 ω_B 和 ω_B 在与 A 点不同的A' 点相交．B' 和 C' 点的定义类似．请证明直线 AA'，BB'，CC' 与直线 IO 四线共点．