2012 年浙江省高中数学竞赛试题解答

说明：本试卷分为 A 卷和 B 卷：A 卷由本试卷的 22 题组成，即 10 道选择题，7 道填空题、3 道解答题和 2 道附加题；B 卷由本试卷的前 20 题组成，即 10 道选择题，7 道填空题和 3 道解答题。

一、选择题（本大题共有 10 小题，每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填入题干后的括号里，多选、不选、错选均不得分，每题 5 分，共 50 分）

1．已知i为虚数单位，则复数$\frac{1+2i}{i-2}=$（ B ）

A．i　　B．$-i$　　C．$-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$　　D．$-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

解答：$\frac{1+2i}{i-2}=\frac{(1+2i)(i+2)}{(i-2)(i+2)}=-i$。正确答案为 B。

2．下列函数中，既是奇函数，又在区间$(-\infty,+\infty)$上单调递增的函数为（ C ）

A. $y=x^2+x$　　B. $y=x+2\sin x$　　C. $y=x^3+x$　　D. $y=\tan x$

解答：逐一验证，正确答案为 C。

3. 已知$\vec{a}$与$\vec{b}$均为单位向量，其夹角为θ，则命题$p:\left|\vec{a}-\vec{b}\right|>1$是命题$q:\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$（ B ）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件
C．充分且必要条件　　D．非充分也非必要条件

解答：由向量几何意义知道，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|>1\Rightarrow\theta\in(\frac{\pi}{3},\pi)$；若$\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|>1$，正确答案为 B。

4. 已知集合$P=\{\,x\mid 1\le x\le 2\,\}$，$M=\{\,x|2-a\le x\le 1+a\,\}$，若$P\cap M=P$，则实数$a$的取值范围是（ B ）

A．$(-\infty,1]$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$[-1,1]$　　D．$[-1,+\infty)$

解答：由$P\cap M=P\Rightarrow P\subset M\Rightarrow 2-a\le 1, 1+a\ge 2\Rightarrow a\ge 1$。正确答案为 B。

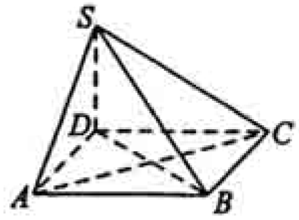
5. 函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{\pi}{6}-x)$ 的最大值为（　C ）。

A　$\frac{13}{4}$　　B　$\frac{\sqrt{13}}{4}$　　C　$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D　$\sqrt{13}$

解答：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{\pi}{6}-x)=\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(x+\varphi)$，其中

$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{13}}{13}$。正确答案为 C。

6．如图，四棱锥 *S*—*ABCD* 的底面为正方形，*SD*⊥底面 *ABCD*，则下列结论中不正确的是（　C ）



A．$AB\perp SA$

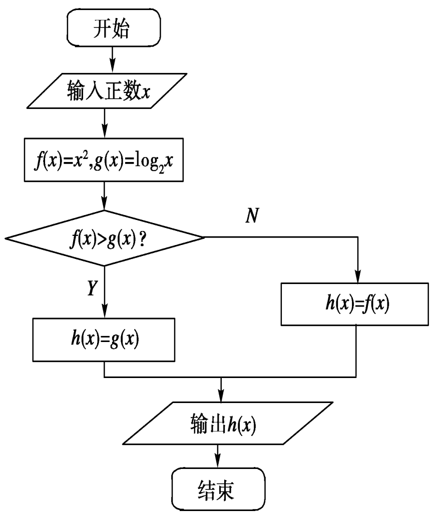
B．*BC*∥平面 *SAD*

C．*BC* 与 *SA* 所成的角等于 *AD* 与 *SC* 所成的角

D．*SA* 与平面 *SBD* 所成的角等于 *SC* 与平面 *SBD* 所成的角

解答：$AB\perp$ 平面 $SAD\Rightarrow AB\perp SA$；由 *BC*∥*AD* 得 *BC*∥平面 *SAD*；设 *AC* 于 *BD* 交于 *O*，则 *SA* 与平面 *SBD* 所成的角为∠ASO，*SC* 与平面 *SBD* 所成的角为∠CSO，且有∠ASO=∠CSO。正确答案为 C。

7．程序框图如图所示，若 $f(x)=x^2,g(x)=\log_2 x$，输入 x 的值为 0.25，则输出结果为(　B)



A.0.24　　B.－2　　C.2　　D.－0.25

解答：计算得正确答案为 B。

8. 设 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 分别表示平面直角坐标系 x,y 轴上的单位向量，且 $|\vec{a}-\vec{i}|+|\vec{a}-2\vec{j}|=\sqrt{5}$，则 $|\vec{a}+2\vec{i}|$ 取值范围为（　D　）

A. $[2\sqrt{2},3]$　　B. $[\frac{6\sqrt{5}}{5},2\sqrt{2}]$　　C. $[\sqrt{5},4]$　　D. $[\frac{6\sqrt{5}}{5},3]$

解答：满足$|\vec{a}-\vec{i}|+|\vec{a}-\overrightarrow{2j}|=\sqrt{5}$向量$\vec{a}$的终点在线段$2x+y-2=0(0\le x\le 1)$上，所以$|\vec{a}+\overrightarrow{2i}|$的最大值就是点（-2,0）与（1,0）距离 3，最小值就是点（-2,0）到线段的距离$\frac{6\sqrt{5}}{5}$。正确答案为 D。

9. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 C: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$的左、右焦点，点$A$的坐标为$(\frac{9}{2},\frac{\sqrt{135}}{2})$，则$\angle F_1AF_2$的平分线与$x$轴交点$M$的坐标为（　A　）.

A．（2,0）　　B．（－2,0）　　C．（4，0）　　D．（－4，0）

解答：$F_1(-6,0),F_2(6,0)\Rightarrow\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=2\Rightarrow\frac{|FM_1|}{|MF_2|}=2\Rightarrow M(2,0)$。正确答案为 A。

10. 设$f(x)=x^2+bx+c$，若方程$f(x)=x$无实根，则方程$f(f(x))=x$　（ D ）

A．有四个相异实根　B. 有两个相异实根　C．有一个实根　D．无实数根

解答：$f(x)=x$无实根，则二次函数图象$f(x)=x^2+bx+c$在直线$y=x$上方，即$f(x)>x$，所以$f(f(x))>f(x)>x$。正确答案为 D。

二、填空题（本大题共有 7 小题，将正确答案填入题干后的横线上，每空 7 分，共 49 分）

11. 设直线$y=ax-4$与$y=8x-b$关于直线$y=x$对称，则

$a=$___$\frac{1}{8}$____$,b=$_-32________。

解答：$y=ax-4$关于$y=x$对称的直线方程为$y=\frac{1}{a}x+\frac{4}{a}$。

$\Rightarrow\frac{1}{a}=8,\frac{4}{a}=-b\Rightarrow a=\frac{1}{8},b=-32$。

12. 已知$\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|}=\sin x$，则$x=$__$k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$_____。

解答：由$\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|}=\sin x\Rightarrow\sin^2 x=\sin x(1+|\cos x|)^2\Rightarrow\sin x=0,$ 或 $\cos x=0$ 且

$\sin x=1\Rightarrow x=k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$。

13. 已知 $x\in R,$ 则 $\sqrt{x(x+1)}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}$ 的值为________$\dfrac{\pi}{2}$________。

解答：$\because x^2+x\ge 0,\therefore x^2+x+1\ge 1\Rightarrow x^2+x=0$，所以原式$=\dfrac{\pi}{2}$。

14. 已知实数 a,b,c,d 满足 $ab=c^2+d^2=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为____

$3-2\sqrt{2}$________。

解答：$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值就是双曲线 $ab=1$ 上点与圆 $c^2+d^2=1$ 上点的最

小距离平方，即 $(1,1),(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 两点距离平方，即 $3-2\sqrt{2}$。

15. 设$\{a_n\}$为等比数列，且每项都大于 1，则 $\lg a_1\lg a_{2012}\sum_{k=1}^{2011}\dfrac{1}{\lg a_i\lg a_{i+1}}$ 的值为

__2011___。

解答：当公比为 1 时，则 $\lg a_1\lg a_{2012}\sum_{k=1}^{2011}\dfrac{1}{\lg a_i\lg a_{i+1}}$ =2011.

当公比为 $q\ne 1$时，则$\lg a_1\lg a_{2012}\sum_{k=1}^{2011}\dfrac{1}{\lg a_i\lg a_{i+1}}=\dfrac{\lg a_1\lg a_{2012}}{\lg q}\sum_{k=1}^{2011}(\dfrac{1}{\lg a_i}-\dfrac{1}{\lg a_{i+1}})$

$=\dfrac{\lg a_1\lg a_{2012}}{\lg q}(\dfrac{1}{\lg a_1}-\dfrac{1}{\lg a_{2012}})=2011$。

16. 设 $x>0$，则 $f(x)=\dfrac{(x+\frac{1}{x})^4-(x^4+\frac{1}{x^4})}{(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})}$ 的最小值为______$\dfrac{7}{3}$______。

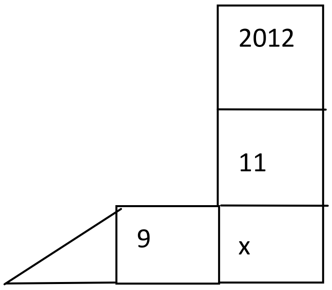
解答：$t=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow t\ge 2,x^4+\dfrac{1}{x^4}=t^4-4t^2+2,x^3+\dfrac{1}{x^3}=t^3-3t$，所以

$f(x)=g(t)=\dfrac{4}{3}t-\dfrac{2}{3}t^{-1}\ge g(2)=\dfrac{4}{3}\times 2-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{3}=f(1)$。因此 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{7}{3}$。

17. 如图是一个残缺的3×3幻方，此幻方每一行每一列及每一条对角线上的三个数之和有相等的值，则x的值为______4016______ 。

解答：补全幻方$4017+2012=x-2003+x\Rightarrow x=4016$。

	4017	2012
4015	X-2003	11
2014	9	x



三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 17 分，共计 51 分）

18. 已知实数$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$满足$\sum_{i=1}^{10}|x_i-1|\le4,\sum_{i=1}^{10}|x_i-2|\le6$，求$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$的平均值

$\bar{x}$。

18. 解答：$10=\left|\sum_{i=1}^{10}[(x_i-1)-(x_i-2)]\right|\le\sum_{i=1}^{10}|x_i-1|+\sum_{i=1}^{10}|x_i-2|\le10$，……（5）

所以有

$\sum_{i=1}^{10}|x_i-1|=4,\sum_{i=1}^{10}|x_i-2|=6\Rightarrow1\le x_i\le2$。……………………………………………（10）

$\Rightarrow\bar{x}=1+\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)=1.4$…………………………………………………………（17）

19. 设P为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$长轴上一个动点，过$P$点斜率为$k$直线交椭圆于$A,B$

两点。若$|PA|^2+|PB|^2$的值仅依赖于k而与P无关，求k的值。

19. 解答：设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，过P点斜率为k直线方程

为$y=k(x-a)$。由$\begin{cases}y=k(x-a)\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\end{cases}$，得

$x_1+x_2=\frac{50ak^2}{16+25k^2},x_1x_2=-\frac{25a^2k^2-400}{16+25k^2}$， …………………………（5）

所以

$y_1+y_2=-\frac{32ak}{16+25k^2}$， $y_1y_2=k^2(x_1-a)(x_2-a)=\frac{(16a^2-400)k^2}{16+25k^2}$。………（10）

所以

$|PA|^2+|PB|^2=(x_1-a)^2+y_1^2+(x_2-a)^2+y_2^2$

$=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2a(x_1+x_2)+(y_1+y_2)^2-2y_1y_2+2a^2$

$=(k^2+1)\bullet\frac{(512-800k^2)a^2+800(16+25k^2)}{(16+25k^2)^2}$， ……………………………………（15）

令 $512-800k^2=0\Rightarrow k=\pm\frac{4}{5}$。………………………………………………………（17）

20．设 $p,q\in Z^+$, 且 $q\le p^2$。试证对 $n\in Z^+$, 存在 $N\in Z^+$, 使

$(p-\sqrt{p^2-q})^n=N-\sqrt{N^2-q^n}$, 且

$(p+\sqrt{p^2-q})^n=N+\sqrt{N^2-q^n}$.

20. 解：设 $x_1=(p-\sqrt{p^2-q})^n, x_2=(p+\sqrt{p^2-q})^n$,

我们有 $x_1x_2=q^n$, ……………………………………………………（5）

令 $N=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^jC_n^{2j}p^{n-2j}(p^2-q)^j$， 显然， $N\in Z^+$,…………（10）

且 x_1,x_2 满足二次方程 $x^2-2Nx+q^n=0$

更由于 $x_1\le x_2$，所以

$x_1=N-\sqrt{N^2-q^n}, x_2=N+\sqrt{N^2-q^n}$ ………………………………………（17）

四、附加题（本大题共 2 小题，每小题 25 分，共计 50 分）

21. 设圆 O_4 与 O_1，圆 O_1 与 O_2，圆 O_2 与 O_3，圆 O_3 与 O_4 分别外切于 P_1,P_2,P_3,P_4, 试证：

（1） P_1,P_2,P_3,P_4 四点共圆；

（2）四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 是某个圆的外切四边形；并且

（3）该圆的半径不超过四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的外接圆的半径。

21. 解答：（1）根据弦切角等于圆心角之半，我们有

$\angle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}(\angle O_4O_1O_2+\angle O_1O_2O_3),\angle P_3P_4P_1=\frac{1}{2}(\angle O_2O_3O_4+\angle O_3O_4O_1),$ 所以

$\angle P_1P_2P_3+\angle P_3P_4P=\frac{1}{2}(\angle O_4O_1O_2+\angle O_1O_2O_3+\angle O_2O_3O_4+\angle O_3O_4O_1)=\pi,$

这表明 $P_1,P_2,P_3,P_4,$ 四点共圆. ………………………………………………（10）

（2）$O_4O_1+O_2O_3=(O_4P_1+O_1P_1)+(O_3P_3+O_2P_3)=(O_4P_4+O_1P_2)+(O_3P_4+O_2P_2)$

$=(O_4P_4+O_3P_4)+(O_1P_2+O_2P_2)=O_3O_4+O_1O_2$，

所以，四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 是某个圆的外切四边形…………………………（15）

(3) 由（1）（2）四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四条边的垂直平分线交于一点 O，O 也是四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 的内角平分线。又因四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 的内切圆的半径是点 O 到边 O_4O_1 的距离，而四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的外接圆的半径是 $OP_1,P_1\in O_4O_1$。

所以,（3）的结论成立。………………………………………………………（25）

22. 设 $i_1,i_2,\cdots,i_{10}$ 为 1,2，…，10 的一个排列，记 $S=|i_1-i_2|+|i_3-i_4|+\cdots+|i_9-i_{10}|$，求 S 可以取到的所有值。

22. 解答：因为

$S\geq 1+1+1+1+1=5,S\leq 6+7+8+9+10-(1+2+3+4+5)=25$。……………（5）

且 $S\equiv\sum_{k=1}^{10}k(\bmod 2)\equiv 1(\bmod 2)$，………………………………………………………（10）

下面证明 S 可以取到从 5 到 25 的所有奇数。记

$f(i_2,i_4,i_6,i_8,i_{10};i_1,i_3,i_5,i_7,i_9)$ 为排列 $i_2,i_4,i_6,i_8,i_{10};i_1,i_3,i_5,i_7,i_9$ 对应的 S，则

$f(1,2,3,4,6;5,7,8,9,10)=23,f(1,2,3,4,7;5,6,8,9,10)=21,$

$f(1,2,3,4,8;5,6,7,9,10)=19,f(1,2,3,4,9;5,6,7,8,10)=17,$……………………（15）

$f(1,2,3,5,9;4,6,7,8,10)=15,f(1,2,3,6,9;4,5,7,8,10)=13,$

$f(1,2,3,7,9;4,5,6,8,10)=11,f(1,2,4,7,9;3,5,6,8,10)=9,$…………………………（20）

$f(1,2,5,7,9;3,4,6,8,10)=7$。所以 S 取到的值为：

5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25。…………………………………………………（25）