

## 2012年国际数学奥林匹克

1. 给定  $\triangle ABC$ , 设点  $J$  是其角  $A$  内的旁切圆圆心, 该旁切圆切边  $BC$  于点  $M$ , 切直线  $AB$  与  $AC$  分别于点  $K$  与点  $L$ . 直线  $LM$  与  $BJ$  相交于点  $F$ , 直线  $KM$  与  $CJ$  相交于点  $G$ . 设点  $S$  为直线  $AF$  与  $BC$  的交点, 点  $T$  为直线  $AG$  与  $BC$  的交点. 求证: 点  $M$  是线段  $ST$  的中点.

2. 已知  $n \geq 3$ , 如果正实数  $a_2, a_3, \dots, a_n$  满足  $a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1$ , 求证:

$$(a_2 + 1)^2(a_3 + 1)^3 \cdots (a_n + 1)^n > n^n.$$

3. 说谎者猜谜游戏是一个由玩家A和玩家B两个玩家一起玩游戏. 游戏的规则依赖于玩家A和玩家B都知道的两个正整数  $k$  和  $n$ .

在游戏开始时, 玩家A挑选整数  $x$  和  $N$  满足  $1 \leq x \leq N$ . 玩家A将  $x$  保密, 而将  $N$  告知玩家B. 玩家B通过如下方式问玩家A问题以获取关于  $x$  的信息: 每个问题都是由玩家B任意指定一个正整数组成的集合  $S$  (允许重复出现), 然后问玩家A  $x$  是否属于  $S$ . 玩家B可以尽可能多地问问题, 问到满意为止. 每个问题问完之后, 玩家A必须马上回答“是”或者“不是”, 但是玩家A可以撒谎, 唯一的要求是在连续的  $k+1$  个问题中, 至少保证有一个回答是正确的.

在玩家B问完足够多次以后, 他需要指定一个不超过  $n$  个元的正整数组成的集合  $X$ . 如果  $x$  属于  $X$ , 则玩家B赢; 否则玩家A赢.

(1). 如果  $n \geq 2^k$ , 那么  $B$  有必胜策略;

(2). 对足够大的  $k$ , 存在整数  $n$  满足  $n \geq (1.99)^k$  使得玩家B不能确保自己必胜.