2012年国际数学奥林匹克

1. 给定 $\triangle ABC$, 设点 J 是其角 A 内的旁切圆圆心, 该旁切圆切边 BC 于点 M, 切直线 AB 与 AC 分别于点 K 与点 L. 直线 LM 与 BJ 相交于点 F, 直线 KM 与 CJ 相交于点 G. 设点 S 为直线 AF 与 BC 的交点, 点 T 为直线 AG 与 BC 的交点. 求证 : 点 M 是线段 ST 的中点.

2. 已知 $n \geqslant 3$, 如果正实数 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 满足 $a_2 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$, 求证:

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3\cdots(a_n+1)^n > n^n.$$

3. 说谎者猜谜游戏是一个由玩家A和玩家B两个玩家一起玩的游戏. 游戏的规则依赖于玩家A 和玩家B 都知道的两个正整数 k 和 n.

   在游戏开始时, 玩家A 挑选整数 x 和 N 满足 $1 \leqslant x \leqslant N$. 玩家A 将 x 保密, 而将 N 告知玩家B. 玩家B 通过如下方式问玩家A问题以获取关于 x 的信息: 每个问题都是由玩家B 任意指定一个正整数组成的集合 S (允许重复出现), 然后问玩家A x 是否属于 S. 玩家B 可以尽可能多地问问题, 问到满意为止. 每个问题问完之后, 玩家A 必须马上回答"是"或者"不是", 但是玩家A 可以撒谎, 唯一的要求是在连续的 $k+1$ 个问题中, 至少保证有一个回答是正确的.

   在玩家B 问完足够多次以后, 他需要指定一个不超过 n 个元的正整数组成的集合 X. 如果 x 属于 X, 则玩家B 赢; 否则玩家A 赢.

   (1).如果 $n \geqslant 2^k$, 那么 B 有必胜策略;
   (2).对足够大的 k, 存在整数 n 满足 $n \geqslant (1.99)^k$ 使得玩家B 不能确保自己必胜.

4. 找出所有函数$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, 使得对任意满足 $a+b+c=0$ 的整数 a, b, c 都成立

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

5. 三角形 ABC 中 $\angle C = 90°$, 点 D 在边 AB 上且 $CD \perp AB$. 设 X 是线段 CD 上一点(非端点), 点 K 在线段 AX 上使得 $BK = BC$, 点 L 在线段 BX 上使得 $AL = AC$, 点 M 是直线 AL 与 BK 的交点. 求证: $MK = ML$.

6. 试求出所有正整数 n, 使得存在非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$