2012年第九届东南数学奥林匹克

1. 求一个三元整数组 (l, m, n) $(1 < l < m < n)$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{l} k$, $\sum\limits_{k=l+1}^{m} k$, $\sum\limits_{k=m+1}^{n} k$ 依次成等比数列.

2. 如图, $\triangle ABC$ 的内切圆 I 在边 AB, BC CA 上的切点分别为 D, E, F, 直线 EF 与直线 AI, BI, DI 分别相交于点 M, N, K. 证明: $DM \cdot KE = DN \cdot KF$.

3. 对于合数 n, 记 $f(n)$ 为其最小的三个正约数之和, $g(n)$ 为其最大的两个正约数之和. 求所有的正合数 n, 使得 $g(n)$ 等于 $f(n)$ 的某个正整数次幂.

4. 已知实数 a, b, c, d 满足: 对任意实数 x, 均有

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x + d \cos 4x \leqslant 1,$$

求 $a + b - c + d$ 的最大值. 当 $a + b - c + d$ 取最大值时, 求实数 a, b, c, d 的值.

5. 如果非负整数 m 及其各位数字之和均为 6 的倍数, 则称 m 为"六合数". 求小于 2012 的非负整数中"六合数"的个数.

6. 求正整数 n 的最小值, 使得

$$\sqrt{\frac{n-2011}{2012}} - \sqrt{\frac{n-2012}{2011}} < \sqrt[3]{\frac{n-2013}{2011}} - \sqrt[3]{\frac{n-2011}{2013}}.$$

7. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 为边 AC 上一点且 $\angle ABD = \angle C$, 点 E 在边 AB 上且 $BE = DE$, 设 M 为 CD 中点, $AH \perp DE$ 于点 H. 已知 $AH = 2 - \sqrt{3}$, $AB = 1$, 求 $\angle AME$ 的度数.

8. 设 m 是正整数, $n = 2^m - 1$, $P_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为数轴上 n 个点所成的集合. 一个蚱蜢在这些点上跳跃, 每步从一个点跳到与之相邻的点. 求 m 的最大值, 使对任意 $x, y \in P_n$, 从点 x 跳 2012 步到点 y 的跳法种数为偶数 (允许中途经过点 x, y).

By 路箩筐