空念数学杂志
2012年 第 1 卷 第 4 期 51–55

2012海南师范大学数学分析B卷

1. (10′) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\tan^4 x}\displaystyle\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t$.

解答.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan^4 x}\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t \cdot \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\tan^4 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin t^3 \mathrm{d}t\\ (L'Hospital\ 法则) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

■

2. (10′) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $x=a$ 处可导 , 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(a)f(x)-f(a)g(x)}{x-a}$.

解答.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{g(a)f(x)-f(a)g(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\ &= g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a} - f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-a}{x-a}\\ &= g(a)f'(a)-f(a)g'(a)\,.\end{aligned}$$

■

3. (10′) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{\sqrt{n^6+k}}$.

解答.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{\sqrt{n^6+k}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{\sqrt{n^6}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^6}} = 1\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{\sqrt{n^6+k}} \geqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^6+n}} = 1\,.$$

因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{\sqrt{n^6+k}} = 1$. ■

4. (10′) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域上连续 , 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

(a) 求 $f(0)$ 的值 .

(b) 求 $f'(0)$ 的值 .

(c) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 .

解答. 因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$，所以存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $0<|x|<\delta$，都有

$$1<\frac{f(x)}{x^2}<3\,,$$

所以在 $(-\delta,0)$ 和 $(0,\delta)$ 上有 $x^2<f(x)<3x^2$. 又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域上连续，所以

$$0=\lim_{x\to 0}x^2\leqslant f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)\leqslant\lim_{x\to 0}3x^2=0\,,$$

因此，$f(0)=0$. 同时

$$0=\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{x}\right|\leqslant|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{3x^2}{x}\right|=0\,,$$

因此 $f'(0)=0$. 另外，在 $(-\delta,\delta)$ 上，当 $x\neq 0$ 时，此时 $f(x)>x^2>0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值. ■

5. (10′) 求三重积分

$$\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

这里 V 是由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成的区域.

解答. 引入广义球面坐标变换 $x=ar\sin\varphi\cos\theta, y=br\sin\varphi\sin\theta, z=cr\cos\varphi$，于是 V 对应于区域 $\Omega=\{(r,\varphi,\theta)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$. 此变换的 *Jacobi* 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abcr^2\sin\varphi\,.$$

因此

$$\begin{aligned}\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=&\iiint_\Omega abcr^4\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{4\pi}{5}abc\,.\end{aligned}$$

■

6. (10′) 计算第二类曲面积分

$$I=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

其中 S 表示锥面 $x^2+y^2=z^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧.

解答. 由对称性 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$，所以

$$I = \iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r^2\cdot r\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{2}h^4\,.$$

■

7. (12′) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

解答. 因为 $\sqrt[n]{n} > 1$ 且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^{n-1}$ 的收敛域为

$$|x-2| < 1 \quad\Longrightarrow\quad 1 < x < 3\,.$$

另外

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^{n-1}$ 的和函数是 $\dfrac{1}{(1-(x-2))^2} = \dfrac{1}{(3-x)^2}$，再由前面所得收敛域为 $(1,3)$. ■

8. (12′) 证明函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

证明. 因为 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x + 3}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$，所以存在 $G > 0$ 使得当 $x > G$ 时，$|f'(x)| \leqslant 1$. 此时对任意的 $\varepsilon > 0$，任取 $x, x' \in (G,+\infty)$，只要 $|x-x'| < \varepsilon$，就有

$$|f(x) - f(x')| = |f'(\xi)||x-x'| \leqslant |x-x'| < \varepsilon\,,$$

其中 ξ 在 x, x' 之间，因此 $\xi > G$，所以 $|f'(\xi)| \leqslant 1$. 从而 $f(x)$ 在 $(G,+\infty)$ 上一致连续.

又因为 $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\ln x = 0$，所以由 *Cantor* 定理知 $f(x)$ 在 $(0, G+1]$ 上一致连续. 综上所述，易证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. ■

注记. 中间有些我觉得显然的结论跳过了，请读者自行补上. ■

9. (12′) 证明广义积分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

证明. $\displaystyle\int_1^{A}\sin x\mathrm{d}x$ 显然有界，$\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，由 *Dirichlet* 判别法，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

但在 $[1,+\infty)$，有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

因 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$收敛(仿照上面对 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的讨论)而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$. 再由比较判别法，可知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

因此，广义积分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛. ■

10. (12′) 设 $f(x)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$. 证明：

(a) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在.

(b) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

(c) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

证明. *(a)*

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0,\ \ f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0}=0.$$

(b) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

此时令 $x_k=y_k=\dfrac{\sqrt{2}}{4k\pi}$，此时 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}(x_k,y_k)=(0,0)$，而

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k,y_k)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\neq f_x(0,0)=0,$$

因此 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续；同理可证 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

(c) 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\\ &\leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0.\end{aligned}$$

然后注意到 (a) 的结论知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. ■

11. (12′) 设 $u(x,y)$ 在闭单位圆 $\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$. 若在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 证明当 $x^2+y^2<1$ 时, $u(x,y)\geqslant 0$.

证明. 反设存在 (x',y') 满足 $x'^2+y'^2<1$ 且 $u(x',y')<0$. 设 $u(x,y)$ 在 Ω 上的最小值在 (x_0,y_0) 上取到, 则由在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$ 知 $u(x_0,y_0)\leqslant u(x',y')<0$ 且 (x_0,y_0) 在 Ω 内部. 于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=0, \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=0$. 又因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)=u(x_0,y_0)<0\,.$$

不妨设 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$, 此时令 $f(x)=u(x,y_0)$, 则

$$f'(x_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=0\,,\ f''(x_0)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0\,,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取到极大值. 又因为 $f(x)$ 必然在 $x=x_0$ 处取到最小值, 所以 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内为常数, 由此可推得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)=0$, 这与 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$ 矛盾. 故反设不成立, 从而命题得证. ■

12. (12′) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导且 $f(0)=0$, 且存在 $M>0$ 使得 $|f'(x)|\leqslant M|f(x)|$, 求证: $f(x)\equiv 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

证明. 我们用归纳法证明对任意自然数 k 有 $f(x)\equiv 0$ 在 $\left[\dfrac{k}{2M},\dfrac{k+1}{2M}\right]$ 上成立. 当 $k=0$ 时, 因为 $f(x)$ 连续, 因此可设 $|f(x)|$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2M}\right]$ 上的最大值在 $x=\eta$ 上取到, 此时由中值定理有

$$\left|\frac{f(\eta)}{\eta}\right|=\left|\frac{f(\eta)-f(0)}{\eta-0}\right|=|f'(\xi)|\leqslant M|f(\xi)|\leqslant M|f(\eta)|\,,$$

其中 $\xi\in(0,\eta)$, 所以 $\eta M\leqslant \dfrac{1}{2M}\cdot M=\dfrac{1}{2}<1$, 所以

$$|f(\eta)|\leqslant \eta M|f(\eta)|\leqslant |f(\eta)|\,,$$

这说明 $f(\eta)=0$, 因此 $f(x)\equiv 0$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2M}\right]$ 上. 剩下的步骤只需用归纳法再仿照上面的方法即可. ■