空念数学杂志
2012年 第 1 卷 第 3 期 47–50

2012年北京大学保送生考试试题参考解答

文科选作1－4题　　理科选作2－5题

1. 已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列，公比 $q>0$，并且 $a_3+a_4-a_1-a_2=5$，求 a_5+a_6 的最小值．

解答. 设 $k=a_1+a_2$，则 $a_3+a_4=q^2k$，因此

$$5=a_3+a_4-a_1-a_2=(q^2-1)k \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{5}{q^2-1}$$

由题意 $k>0$，所以 $q^2-1>0$，因此由均值不等式有

$$\begin{aligned}a_5+a_6=&q^4k=\frac{5q^4}{q^2-1}=5\left(q^2+1+\frac{1}{q^2-1}\right)\\=&5\left(q^2-1+\frac{1}{q^2-1}\right)+10\\\geqslant&5\cdot 2\sqrt{(q^2-1)\cdot\frac{1}{q^2-1}}+10\\=&10+10=20\end{aligned}$$

当 $a_1=5(\sqrt{2}-1), q=\sqrt{2}$ 时，易验证此时 $a_5+a_6=20$，因此最小值为 20． ■

2. 已知 $f(x)$ 为实系数一元二次函数，$a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ 为正项等比数列，求证：$f(a)=a$．

证明. 反设 $f(a)\neq a$，则可设 $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ 的公比为 q，显然 $q\neq 1$．此时有

$$f(a)-qa=0 \quad\Longrightarrow\quad f(x)-qx=k(x-a)(x-b)\,,$$

其中 k,b 待定，且$k\neq 0$．此时 $f(f(x))-qf(x)=k(f(x)-a)(f(x)-b)$，而 $f(f(a))=qf(a)$，所以

$$0=f(f(a))-qf(a)=k(f(a)-a)(f(a)-b)\,.$$

因为 $f(a)\neq a$，所以 $f(a)-b=0$，即 $b=qa$，因此

$$f(x)-qx=k(x-a)(x-qa)\,.$$

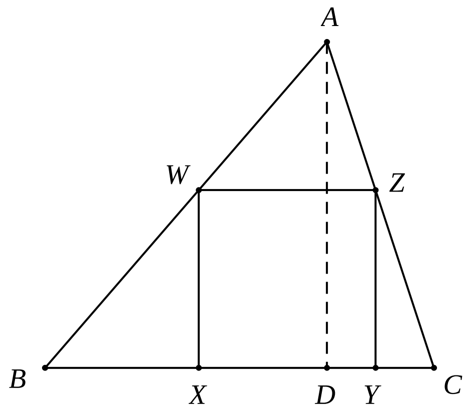
又因为 $f(f(f(a)))=qf(f(a))$，所以

$$\begin{aligned}0=&f(f(f(a)))-qf(f(a))=k(f(f(a))-a)(f(f(a))-qa)\\=&k(q^2a-a)(q^2a-qa)\end{aligned}$$

因为 $a,q>0, k\neq 0$ 且 $q\neq 1$，所以上式不可能成立，矛盾．因此 $f(a)=a$． ■

注记. 发现北大很喜欢考这类一元二次函数迭代的问题，比如我写的《2011年北京大学保送生考试试题参考解答》中的第4题用的也是和这类似的方法． ■

3. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c，且 $a > b > c$，求证：顶点都在该三角形三边上的最大内接正方形的边长为 $\dfrac{ac\sin B}{c + a\sin B}$．



证明. 由于内接正方形的顶点都在三角形三边上，那么必然有两相邻顶点位于同一边上．于是由对称性，我们先考虑相邻两顶点在边 BC 边上的情形，此时正方形的位置如图所示，下面求正方形 $XYZW$ 的边长，设之为 x．作高 $AD \perp BC$ 于 D，则 $AD = c\sin B$．因为 WX 平行于 AD，所以

$$\frac{BW}{BA} = \frac{WX}{AD} = \frac{x}{c\sin B};$$

又因为 WZ 平行于 BC，所以

$$\frac{AW}{AB} = \frac{WZ}{BC} = \frac{x}{a}.$$

因此

$$1 = \frac{BW}{BA} + \frac{AW}{AB} = \frac{x}{c\sin B} + \frac{x}{a} \implies x = \frac{ac\sin B}{a + c\sin B}.$$

同理可得相邻两顶点在其它二边上时内接正方形的边长为

$$\frac{ba\sin C}{b + a\sin C}, \quad \frac{cb\sin A}{c + b\sin A}.$$

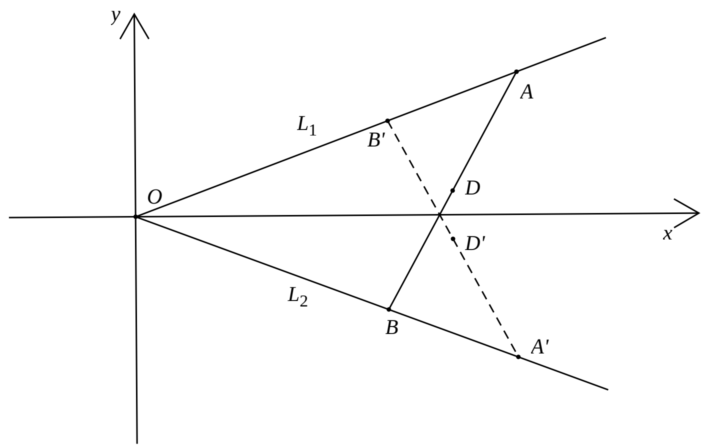
注意到，由正弦定理有 $ac\sin B = ba\sin C = cb\sin A$，所以只需考虑分母中最小的．设 $\triangle ABC$的外接圆半径为 R，则 $a, b, c \le 2R$，且由正弦定理有

$$(a + c\sin B) - (b + a\sin C) = a + \frac{bc}{2R} - b - \frac{ac}{2R} = \frac{(a-b)(2R-c)}{2R} \geqslant 0,$$

$$(b+a\sin C)-(c+b\sin A)=b+\frac{ca}{2R}-c-\frac{ba}{2R}=\frac{(b-c)(2R-a)}{2R}\geqslant 0\,,$$

所以 $a+c\sin B\geqslant b+a\sin C\geqslant c+b\sin A$. 由于 $b\sin A=a\sin B$, 因此顶点都在该三角形三边上的最大内接正方形的边长为 $\dfrac{ac\sin B}{c+a\sin B}$. ■

4. 已知 L_1,L_2 为点 O 出发的两条射线, λ 为一正常数, 直线 L 分别交 L_1,L_2 于 A,B 两点, 且 $S_{\triangle AOB}=\lambda$, AB 中点为 D, D 随着 A,B 的运动构成轨迹 Γ. 求证: 轨迹 Γ 关于 L_1,L_2 夹角的角平分线反射对称, 且轨迹 Γ 为双曲线.



证明. 如图所示, 以 L_1,L_2 夹角的角平分线为 x 轴, O 为原点建立直角坐标系. 设L_1,L_2的夹角为 2θ $(\theta<\dfrac{\pi}{2})$, 则直线 L_1 的斜率为 $\tan\theta$, 直线 L_2 的斜率为 $-\tan\theta$. 设 A,B 的坐标分别为 $(x_1,x_1\tan\theta),(x_2,-x_2\tan\theta)$. 则由 $S_{\triangle OAB}=\lambda$ 知

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1}{\cos\theta}\cdot\frac{x_2}{\cos\theta}\cdot\sin 2\theta=\lambda\implies x_1x_2=\frac{\lambda}{\tan\theta}\,.$$

又因为此时 D 的坐标为 $(x,y)=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{(x_1-x_2)\tan\theta}{2}\right)$, 此时

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\lambda/\tan\theta}-\frac{y^2}{\lambda\tan\theta}&=\frac{(x_1+x_2)^2\tan\theta}{4\lambda}-\frac{(x_1-x_2)^2\tan\theta}{4\lambda}\\&=\frac{4x_1x_2\tan\theta}{4\lambda}=1\end{aligned}$$

因此 D 随着 A,B 的运动构成轨迹在双曲线 $\dfrac{x^2}{\lambda/\tan\theta}-\dfrac{y^2}{\lambda\tan\theta}=1$ 的右侧上. 又因为, 若 A,B 的坐标分别为 $(x_1,x_1\tan\theta),(x_2,-x_2\tan\theta)$ 时 A,B 满足题意, 那么 $A'(x_2,x_2\tan\theta),B'(x_1,-x_1\tan\theta)$ 也满足题意, 此时

$$D'\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{(x_2-x_1)\tan\theta}{2}\right)\quad 和\quad D\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{(x_1-x_2)\tan\theta}{2}\right)$$

关于 x 轴即L_1, L_2 夹角的角平分线对称，所以轨迹 Γ 关于 L_1, L_2 夹角的角平分线反射对称．又对任意的$\xi \geqslant \sqrt{\dfrac{\lambda}{\tan\theta}}$，方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2} = \xi \\ x_1x_2 = \dfrac{\lambda}{\tan\theta} \end{cases}$$

有正数解，加之前面已证轨迹 Γ 关于 L_1, L_2 夹角的角平分线反射对称，所以双曲线 $\dfrac{x^2}{\lambda/\tan\theta} - \dfrac{y^2}{\lambda\tan\theta} = 1$ 的右侧能被轨迹 Γ 覆盖，即轨迹 Γ 就是双曲线 $\dfrac{x^2}{\lambda/\tan\theta} - \dfrac{y^2}{\lambda\tan\theta} = 1$ 的右侧．综上所述，得证． ■

注记. 实际上轨迹方程很好猜，可以先从轨迹方程入手．首先考虑等腰三角形，此时可求得顶点，然后在 B 趋近于 O 时，此时 AB 趋近于 L_1，所以 D 也趋近于在 L_1 上，这说明 L_1 为渐近线，同理 L_2 也为渐近线．根据这两个条件可轻松求得轨迹方程． ■

5. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 为正实数，且满足 $\sum\limits_{n=1}^{10} a_n = 30, \prod\limits_{n=1}^{10} a_i < 21$，求证：$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 必有一者在区间 $(0,1)$ 上.

证明. 反设 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 全部不小于 1，于是可令 $b_i = a_1 - 1$，则 $b_i \geqslant 0$，其中 $i = 1, 2, \cdots, 10$．于是有

$$\sum_{n=1}^{10} b_i = 20\,,\ \prod_{n=1}^{10}(1+b_i) < 21\,.$$

注意到 $b_i \geqslant 0$，所以

$$21 > \prod_{n=1}^{10}(1+b_i) \geqslant 1 + \sum_{n=1}^{10} b_i = 21\,,$$

矛盾．因此 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 必有一者在区间 $(0,1)$ 上. ■