

2012年北京大学保送生考试试题参考解答

文科选作1—4题 理科选作2—5题

1. 已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 公比 $q > 0$, 并且 $a_3 + a_4 - a_1 - a_2 = 5$, 求 $a_5 + a_6$ 的最小值.

解答. 设 $k = a_1 + a_2$, 则 $a_3 + a_4 = q^2 k$, 因此

$$5 = a_3 + a_4 - a_1 - a_2 = (q^2 - 1)k \implies k = \frac{5}{q^2 - 1}$$

由题意 $k > 0$, 所以 $q^2 - 1 > 0$, 因此由均值不等式有

$$\begin{aligned} a_5 + a_6 &= q^4 k = \frac{5q^4}{q^2 - 1} = 5 \left(q^2 + 1 + \frac{1}{q^2 - 1} \right) \\ &= 5 \left(q^2 - 1 + \frac{1}{q^2 - 1} \right) + 10 \\ &\geq 5 \cdot 2 \sqrt{(q^2 - 1) \cdot \frac{1}{q^2 - 1}} + 10 \\ &= 10 + 10 = 20 \end{aligned}$$

当 $a_1 = 5(\sqrt{2} - 1)$, $q = \sqrt{2}$ 时, 易验证此时 $a_5 + a_6 = 20$, 因此最小值为 20. ■

2. 已知 $f(x)$ 为实系数一元二次函数, $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ 为正项等比数列, 求证: $f(a) = a$.

证明. 反设 $f(a) \neq a$, 则可设 $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ 的公比为 q , 显然 $q \neq 1$. 此时有

$$f(a) - qa = 0 \implies f(x) - qx = k(x - a)(x - b),$$

其中 k, b 待定, 且 $k \neq 0$. 此时 $f(f(x)) - qf(x) = k(f(x) - a)(f(x) - b)$, 而 $f(f(a)) = qf(a)$, 所以

$$0 = f(f(a)) - qf(a) = k(f(a) - a)(f(a) - b).$$

因为 $f(a) \neq a$, 所以 $f(a) - b = 0$, 即 $b = qa$, 因此

$$f(x) - qx = k(x - a)(x - qa).$$

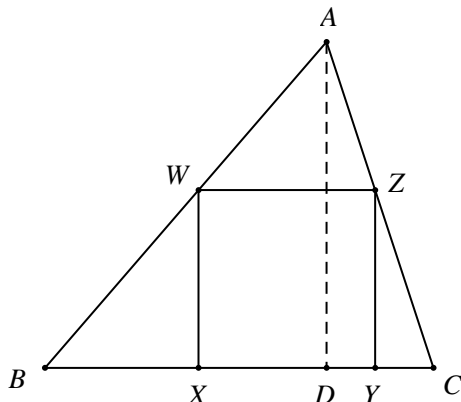
又因为 $f(f(f(a))) = qf(f(a))$, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= f(f(f(a))) - qf(f(a)) = k(f(f(a)) - a)(f(f(a)) - qa) \\ &= k(q^2 a - a)(q^2 a - qa) \end{aligned}$$

因为 $a, q > 0, k \neq 0$ 且 $q \neq 1$, 所以上式不可能成立, 矛盾. 因此 $f(a) = a$. ■

注记. 发现北大很喜欢考这类一元二次函数迭代的问题, 比如我写的《2011年北京大学保送生考试试题参考解答》中的第4题用的也是和这类似的方法. ■

3. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c , 且 $a > b > c$, 求证: 顶点都在该三角形三边上的最大内接正方形的边长为 $\frac{ac \sin B}{c + a \sin B}$.



证明. 由于内接正方形的顶点都在三角形三边上, 那么必然有两相邻顶点位于同一边上. 于是由对称性, 我们先考虑相邻两顶点在边 BC 边上的情形, 此时正方形的位置如图所示, 下面求正方形 $XYZW$ 的边长, 设之为 x . 作高 $AD \perp BC$ 于 D , 则 $AD = c \sin B$. 因为 WX 平行于 AD , 所以

$$\frac{BW}{BA} = \frac{WX}{AD} = \frac{x}{c \sin B};$$

又因为 WZ 平行于 BC , 所以

$$\frac{AW}{AB} = \frac{WZ}{BC} = \frac{x}{a}.$$

因此

$$1 = \frac{BW}{BA} + \frac{AW}{AB} = \frac{x}{c \sin B} + \frac{x}{a} \implies x = \frac{ac \sin B}{a + c \sin B}.$$

同理可得相邻两顶点在其它二边上时内接正方形的边长为

$$\frac{ba \sin C}{b + a \sin C}, \quad \frac{cb \sin A}{c + b \sin A}.$$

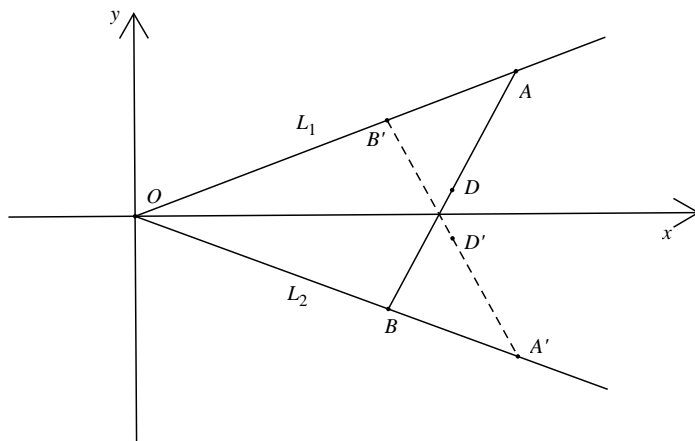
注意到, 由正弦定理有 $ac \sin B = ba \sin C = cb \sin A$, 所以只需考虑分母中最小的. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 则 $a, b, c \leq 2R$, 且由正弦定理有

$$(a + c \sin B) - (b + a \sin C) = a + \frac{bc}{2R} - b - \frac{ac}{2R} = \frac{(a-b)(2R-c)}{2R} \geq 0,$$

$$(b + a \sin C) - (c + b \sin A) = b + \frac{ca}{2R} - c - \frac{ba}{2R} = \frac{(b-c)(2R-a)}{2R} \geq 0,$$

所以 $a + c \sin B \geq b + a \sin C \geq c + b \sin A$. 由于 $b \sin A = a \sin B$, 因此顶点都在该三角形三边上的最大内接正方形的边长为 $\frac{ac \sin B}{c + a \sin B}$. ■

4. 已知 L_1, L_2 为点 O 出发的两条射线, λ 为一正常数, 直线 L 分别交 L_1, L_2 于 A, B 两点, 且 $S_{\triangle AOB} = \lambda$, AB 中点为 D , D 随着 A, B 的运动构成轨迹 Γ . 求证: 轨迹 Γ 关于 L_1, L_2 夹角的角平分线反射对称, 且轨迹 Γ 为双曲线.



证明. 如图所示, 以 L_1, L_2 夹角的角平分线为 x 轴, O 为原点建立直角坐标系. 设 L_1, L_2 的夹角为 2θ ($\theta < \frac{\pi}{2}$), 则直线 L_1 的斜率为 $\tan \theta$, 直线 L_2 的斜率为 $-\tan \theta$. 设 A, B 的坐标分别为 $(x_1, x_1 \tan \theta), (x_2, -x_2 \tan \theta)$. 则由 $S_{\triangle OAB} = \lambda$ 知

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1}{\cos \theta} \cdot \frac{x_2}{\cos \theta} \cdot \sin 2\theta = \lambda \implies x_1 x_2 = \frac{\lambda}{\tan \theta}.$$

又因为此时 D 的坐标为 $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{(x_1 - x_2) \tan \theta}{2} \right)$, 此时

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda / \tan \theta} - \frac{y^2}{\lambda} \tan \theta &= \frac{(x_1 + x_2)^2 \tan \theta}{4\lambda} - \frac{(x_1 - x_2)^2 \tan \theta}{4\lambda} \\ &= \frac{4x_1 x_2 \tan \theta}{4\lambda} = 1 \end{aligned}$$

因此 D 随着 A, B 的运动构成轨迹在双曲线 $\frac{x^2}{\lambda / \tan \theta} - \frac{y^2}{\lambda} \tan \theta = 1$ 的右侧上.

又因为, 若 A, B 的坐标分别为 $(x_1, x_1 \tan \theta), (x_2, -x_2 \tan \theta)$ 时 A, B 满足题意, 那么 $A'(x_2, x_2 \tan \theta), B'(x_1, -x_1 \tan \theta)$ 也满足题意, 此时

$$D' \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{(x_2 - x_1) \tan \theta}{2} \right) \quad \text{和} \quad D \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{(x_1 - x_2) \tan \theta}{2} \right)$$

关于 x 轴即 L_1, L_2 夹角的角平分线对称, 所以轨迹 Γ 关于 L_1, L_2 夹角的角平分线反射对称. 又对任意的 $\xi \geq \sqrt{\frac{\lambda}{\tan \theta}}$, 方程组

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = \xi \\ x_1 x_2 = \frac{\lambda}{\tan \theta} \end{cases}$$

有正数解, 加之前面已证轨迹 Γ 关于 L_1, L_2 夹角的角平分线反射对称, 所以双曲线 $\frac{x^2}{\lambda/\tan \theta} - \frac{y^2}{\lambda} \tan \theta = 1$ 的右侧能被轨迹 Γ 覆盖, 即轨迹 Γ 就是双曲线 $\frac{x^2}{\lambda/\tan \theta} - \frac{y^2}{\lambda} \tan \theta = 1$ 的右侧. 综上所述, 得证. ■

注记. 实际上轨迹方程很好猜, 可以先从轨迹方程入手. 首先考虑等腰三角形, 此时可求得顶点, 然后在 B 趋近于 O 时, 此时 AB 趋近于 L_1 , 所以 D 也趋近于在 L_1 上, 这说明 L_1 为渐近线, 同理 L_2 也为渐近线. 根据这两个条件可轻松求得轨迹方程. ■

5. 已知 a_1, a_2, \dots, a_{10} 为正实数, 且满足 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 30, \prod_{n=1}^{10} a_i < 21$, 求证: a_1, a_2, \dots, a_{10} 必有一者在区间 $(0, 1)$ 上.

证明. 反设 a_1, a_2, \dots, a_{10} 全部不小于 1, 于是可令 $b_i = a_i - 1$, 则 $b_i \geq 0$, 其中 $i = 1, 2, \dots, 10$. 于是有

$$\sum_{n=1}^{10} b_i = 20, \prod_{n=1}^{10} (1 + b_i) < 30.$$

注意到 $b_i \geq 0$, 所以

$$21 > \prod_{n=1}^{10} (1 + b_i) \geq 1 + \sum_{n=1}^{10} b_i = 21,$$

矛盾. 因此 a_1, a_2, \dots, a_{10} 必有一者在区间 $(0, 1)$ 上. ■