

2012年北京大学保送生测试数学试题

文科选作1—4题 理科选作2—5题

1. 已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 公比 $q > 0$, 并且 $a_3 + a_4 - a_1 - a_2 = 5$, 求 $a_5 + a_6$ 的最小值.
2. 已知 $f(x)$ 为实系数一元二次函数, $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ 为正项等比数列, 求证: $f(a) = a$.
3. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c , 且 $a > b > c$, 求证: 顶点都在该三角形三边上的最大内接正方形的边长为 $\frac{ac \sin B}{c + a \sin B}$.
4. 已知 L_1, L_2 为点 O 出发的两条射线, λ 为一正常数, 直线 L 分别交 L_1, L_2 于 A, B 两点, 且 $S_{\triangle AOB} = \lambda$, AB 中点为 D , D 随着 A, B 的运动构成轨迹 Γ . 求证: 轨迹 Γ 关于 L_1, L_2 夹角的角平分线反射对称, 且轨迹 Γ 为双曲线.
5. 已知 a_1, a_2, \dots, a_{10} 为正实数, 且满足 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 30, \prod_{n=1}^{10} a_i < 21$, 求证: a_1, a_2, \dots, a_{10} 必有一者在区间 $(0, 1)$ 上.