2011年全国新课标理科数学压轴题解析

已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

(I) 求 a,b 的值.

(II) 证明: 当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

解答. (I) 由题意知, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$$y=f'(1)(x-1)+f(1);$$

另外曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}(x-1)+1$. 因此有 $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(1)=1$.

注意到, $f'(x)=\dfrac{a}{x(1+x)}-\dfrac{a\ln x}{(1+x)^2}-\dfrac{b}{x^2}$, 所以可得方程

$$\begin{cases}\dfrac{a}{2}-b=-\dfrac{1}{2},\\ b=1,\end{cases}$$

解之得 $a=1,b=1$.

(II) 不等式等价于当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $\dfrac{1}{x}>\dfrac{2\ln x}{x^2-1}$.

考虑函数 $h(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$, 则

$$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{(1+x)^2}{x^2}.$$

于是当 $x>0$时, $h'(x)>0$ 恒成立, 即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增. 又因为 $h(1)=0$, 所以当 $0<x<1$ 时, $h(x)<0$; 当 $x>1$ 时, $h(x)>0$.

当 $0<x<1$ 时, 此时 $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x}-2\ln x<0$, 即 $2\ln x>\dfrac{x^2-1}{x}$. 两边同时除以 x^2-1 (此时 $x^2-1<0$), 得到 $\dfrac{2\ln x}{x^2-1}<\dfrac{1}{x}$;

当 $x>1$ 时, 此时 $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x}-2\ln x>0$, 即 $\dfrac{x^2-1}{x}>2\ln x$. 两边同时除以 x^2-1 (此时 $x^2-1>0$), 得到 $\dfrac{2\ln x}{x^2-1}>\dfrac{1}{x}$.

综上所述, 总有当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $\dfrac{1}{x}>\dfrac{2\ln x}{x^2-1}$. ■

By Nirvanacs