

2011年全国大纲卷理科数学压轴题解析

(I) 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$, 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

(II) 从编号 1 到 100 的 100 张卡片中每次随机抽取一张, 然后放回, 用这种方式连续抽取 20 次, 设抽得的 20 个号码互不相同的概率为 p . 证明: $p < \left(\frac{9}{10}\right)^{19} < \frac{1}{e^2}$.

解答. (I) 注意到此时 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$, 因此当 $x > 0$ 时, 有 $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时递增. 又因为 $f(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > f(0) = 0$.

(II) 容易求得此时 $p = \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdots \frac{81}{100}$, 注意到由均值不等式有对任意的 $k = 1, 2, \dots, 9$ 有

$$\frac{100-k}{100} \cdot \frac{80+k}{100} < \left(\frac{100-k}{100} + \frac{80+k}{100}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

因此

$$p = \frac{90}{100} \prod_{k=1}^9 \left(\frac{100-k}{100} \cdot \frac{80+k}{100}\right) < \left(\frac{9}{10}\right)^{1+9 \times 2} = \left(\frac{9}{10}\right)^{19}$$

下面只需要证明

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{19} < \frac{1}{e^2} \iff \left(\frac{10}{9}\right)^{19} > e^2$$

两边取自然对数, 则等价于

$$19 \ln \left(1 + \frac{1}{9}\right) > 2 \iff \ln \left(1 + \frac{1}{9}\right) > \frac{2}{19}$$

这个式子在 (I) 中求得的不等式中令 $x = \frac{1}{9}$ 即可得到. ■

By Nirvanacs