复旦大学数学科学学院2006级泛函分析期末考试

1. 简述度量空间和完备性的定义，举例一个不完备度量空间．

2. 叙述可分的定义，证明 Banach 空间 l^1 是可分的．

3. 叙述 Arezla-Ascoli 定理并证明

$$\{f \in C[a,b] | f' \text{可导}, |f| \leqslant 1, |f'| \leqslant 1, \forall x \in [a,b]\}$$

   相对列紧．

4. 叙述 Hahn-Banach 延拓定理并证明：X 是赋范线性空间，若 $x_0 \in X$，$x_0 \neq 0$，则存在线性泛函 f 使得 $f(x_0) = ||x_0||$，$||f|| = 1$．

5. 写出闭图像定理，并用范数等价定理证明闭图像定理．

6. 定义线性泛函 f 如下：若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^\infty$，则 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$．求 $||f||$．

7. 设 X 是无限维 Banach 空间，证明不存在 X 的可列子集 E 使得 $\mathrm{span}E = X$．

8. 定义复 Banach 空间 l^2 的算子 T 如下：若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，则

$$T(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right).$$

   证明：T 是紧算子，求 T 的特征值和特征空间，并计算 $\sigma(T)$．

9. 若 T 是 Hilbert 空间上的映射，且满足 $(Tx, y) = (x, Ty)$，证明：T 是有界线性算子．

10. 设 $\mathbb{D} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ 是复平面中的开的单位圆盘，设

$$L = \left\{f : f\text{在}D\text{上解析,并且}|f'(0)|^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \mathrm{d}A(z) < \infty\right\},$$

   定义其上范数 $||f|| = \left(|f'(0)|^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{2}}$．
   证明：L 是 Hilbert 空间并写出内积；对任意 $\mu \in \mathbb{D}$，映射 $L \longrightarrow \mathbb{C} : f \longrightarrow f(\mu)$ 连续；用 F.Riesz 定理证明存在唯一 $K_\mu \in L$，使得 $f(\mu) = (f, K_\mu)$，写出 K_μ 的表达式．

By Nirvanacs