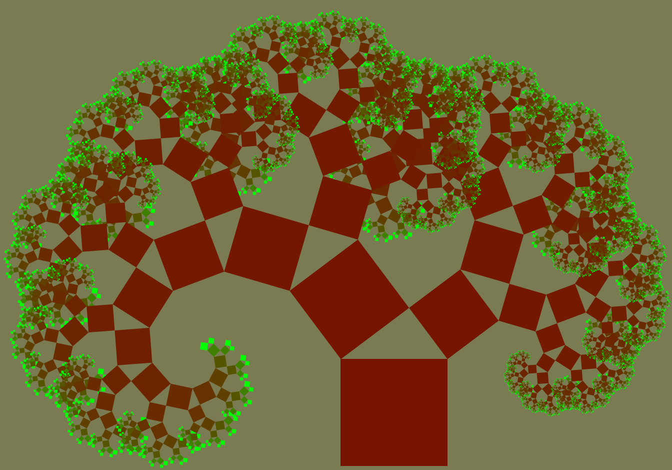
电子信息速递

学数学

Mathematics Studying

2012 年电子刊 | 第 1 期



探索数学学习本源　研究数学思想方法

关注数学发展动态　拓展数学学习视野

香港鹏博文化传播有限公司
HONG KONG PENGBO CULTURE COMMUNICATION., LIMITED
鹏博出版社

目　　次

信息之窗

学数学

单墫

创　刊　寄　语

单　墫

《学数学》, 出版了.

这是高中同学的数学杂志. 目的是:

1. 帮助同学学习高中数学, 解决学习中的疑难问题, 改进学习方法.
2. 帮助同学准备高考、自主招生与数学竞赛, 提供相关信息, 分析考题, 模拟试卷.
3. 帮助同学开拓眼界, 了解更多的有关自主招生的情况与背景知识.
4. 帮助同学提高学习兴趣, 阅读课外书刊, 参加数学活动.

华罗庚先生说: “深入浅出是真功夫”.

我们这份杂志要在深入浅出上多下功夫.

希望我们的文章有很强的可读性, 有众多的读者群.

希望广大读者多提意见与建议, 以便我们改进. □

发　刊　词

编辑部

一丁破土的嫩芽, 只有两片小叶、一丝绿意, 与伟岸秀直的大树相比, 她是微不足道的. 可谁都知道, 巨鱼生自粒卵, 云松出从细籽, 我们正是怀着这样的信心和期盼, 来孕育、呵护、培植、憧憬这个新生事物、这份珍爱事业的.

她, 没有华丽的名字, 只叫《学数学》, 读字知其意, 闻名识朴真——她为学习与研究高中数学而设, 版面不多、装帧不精, 但我们全体编辑人员愿以科学的方法、实在的内容、密集的知识、全新的思维、厚重的奉献, 弥补其外观上的单薄, 使其成为速读时代的精品、薄刊丛中的精英.

我们设想把她办成基础薄弱同学的入门钥匙, 亟待提高同学的上升阶梯, 有志远行同学的探究平台; 希望她能成为广大高中数学老师的益友, 全体爱好数学朋友的良师……同时, 她还是一个学习与争鸣的阵地, 希望大家充分运用、积极参与, 特别欢迎发表你的意见、提出你的问题, 让我们一起探索、一同进步.

几经奔波, 几番辛劳, 几多期待, 《学数学》终于发刊了! 此刻, 我们的紧张大于喜悦, 因为我们知道, 她仍有不少瑕疵, 仍须不断改进……相信在全体编辑人员的努力下, 在全体高中师生的关心和参与下, 我们的杂志一定会办得更好、更有价值! □

致 读 者

编辑部

《学数学》杂志是高中学生学习数学课程参加高考、准备参加自主招生考试、角逐全国高中数学联赛等各级数学竞赛的得力助手. 她是学生研究数学的工具, 学好数学的宝典; 她是高中数学教师教学的伴侣, 竞赛辅导的参考资料.

《学数学》杂志以“探索数学学习本源, 研究数学思想方法, 关注数学发展动态, 拓展数学学习视野”为宗旨, 传播数学文化, 探究压轴经典, 聚焦自主招生, 关注竞赛动态. 2012 年 7 月我们首先发布电子试刊号, 热忱欢迎读者提出你们的宝贵意见与建议.

我们考虑读者使用杂志的便利性, 决定以专辑形式出版发行; 同时考虑读者使用的时效性, 安排如下的编辑出版计划:

第 01, 02 **月**: 综合学习;

第 03, 04 **月**: 高考复习;

第 05, 06 **月**: 综合学习;

第 07, 08 **月**: 高考研究;

第 09, 10 **月**: 数学竞赛;

第 11, 12 **月**: 自主招生.

编辑部特别赠送信息速递 PDF 版电子刊, 读者可以通过学数学杂志电子信息速递链接 (http://www.omaths.com/bbs 顶部右侧) 进行邮件订阅. 我们将通过此项服务, 为读者提供及时的国内外著名大学自主招生政策、数学课外活动和数学竞赛的试题等相关信息.

另外, 为了便于读者交流与订阅, 我们特设《学数学》杂志读者 QQ 群: 208949603.

当然, 我们还热忱欢迎广大高中学生、教师及数学爱好者为各个专辑相关栏目撰稿, 把你们的学习、研究数学的经验介绍给大家, 特别欢迎适合高中生阅读的、内容充实的专题讲座和指导解题的精品文章. 来稿时请注意以下各项:

1. 来稿请标注所投专辑, 专题应附有相应练习题, 并给出答案或提示.

2. 文中例题最好选用国内高考试题 (含模拟试题)、国内外大学自主招生试题、世界各国各级高中竞赛试题, 并请标出试题全称、届次和时间.

3. 凡为本刊数学考场和数学贴吧栏目提供的稿件, 试题内容范围以高中数学课程标准、数学竞赛大纲为准; 题目要有新意 (如用成题, 必须改编), 并注明是自编或改编, 改编题须注明原题出处.

4. 来稿不要一稿多投, 文责自负, 允许编辑修改, 所有刊登稿件, 出版社付稿酬, 版权归出版社所有.

另外, 编辑部为帮助同学们做好 2012 年全国高中数学联赛的赛前准备, 在数学竞赛专辑中给读者朋友们提供数学竞赛讲座与练习、精选的国内外竞赛试题与详细解答及评析, 时效性快, 资料性强, 有助于读者拓宽视野, 进一步提高自身竞赛水平. □

杂 志 导 读

编辑部

编辑部考虑读者使用杂志的便利性、时效性, 决定以专辑形式出版发行. 我们对照前面的编辑计划, 对各专辑内容作如下简要的说明.

每年的 3 月至 6 月正值高三学子埋头复习迎接高考. 我们选择在这个时候给各位迎考的老师、学生提出一些复习的指导意见, 并特约一线著名教师将高考热点与难点问题的研究成果呈现给大家; 高考之后我们还将整理一线教师相关稿件及编委成员研究高考试题成果; 由此编辑形成高考复习与高考研究专辑;

每年的年底及下年的 1, 2 月份是我国大学自主招生考试密集期, 我们特约一线的中学与大学数学教师为杂志撰写自招热点问题的研究、指导与前瞻性分析的文章, 编辑形成自主招生专辑;

每年的 9, 10 月份是全国高中数学联赛的预赛与决赛; 每年的 1 至 4 月份是世界各国数学奥林匹克竞赛与集训; 每年 7, 8 月份又是国内各大数学奥林匹克竞赛与国际数学奥林匹克竞赛. 我们特约一线著名的中学数学竞赛教练为杂志编写竞赛热点与难点的专题讲座, 赛题解析与模拟训练题的文章, 编辑形成数学竞赛专辑.

而对于综合学习专辑, 我们将会把日常学习、高考、自主招生考试及数学竞赛整合在一起, 尽可能的把它们之间的联系处理得更加融洽.

竞赛基础

全国高中数学联赛初赛暨自主招生数学培训讲义

联赛初赛试题分类汇编－函数部分

闫伟锋
(天津南开大学滨海学院公共数学教研室, 300270, summer14_1210@yahoo.com.cn)

前言: 随着国内高校自主招生的火热兴起, 自主招生已经成为名副其实的小高考. 如何获得自主招生的考试资格是广大考生及家长密切关注的问题. 笔者研究国内数十所知名高校的自主招生简章, 发现各高校招生简章都明确指出: 考生在高中阶段获得全国高中数学联赛省级赛区二等奖及以上, 便具备该校的自主招生考试资格. 具有较好数学基础的同学, 在联赛预赛中斩获省赛区二等奖并非难事. 而近几年各高校联盟自主招生的数学考试略高于高考而近似于联赛初赛. 《学数学》期刊精心研究自主招生试题的类型和难度, 分类编辑部分联赛初赛题目, 以服务于广大学子及一线教师.

1. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为 0 的函数. 如果对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$ 都满足. $f(ab)=af(b)+bf(a)$, 则函数 $f(x)$( ).

(A) 是奇函数 (B) 是偶函数

(C) 既是奇函数也是偶函数

(D) 既不是奇函数也不是偶函数

2. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+2$, 当 $x\in[-1,+\infty)$ 时, $f(x)\geqslant a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ( ).

(A) $-2<a<1$ (B)$-2\leqslant a\leqslant 1$

(C)$-3\leqslant a\leqslant -2$ (D)$-3\leqslant a\leqslant 1$

3. 已知关于参数 $a(a>0)$ 的二次函数 $y=ax^2+\sqrt{1-a^2}x+a^2-3a-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4a}$ $(x\in\mathbf{R})$ 的最小值是关于 a 的函数 $f(a)$, 则 $f(a)$ 的最小值为 ( ).

(A)-2 (B)$-\dfrac{137}{64}$ (C)$-\dfrac{1}{4}$

(D) 以上结果都不对

4. 已知二次函数 $f(x)=x^2-3x+2$, 则方程 $f(f(x))=0$ 不同实数根的数目为 ( ).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

5. 已知二次函数 $y=x^2-\dfrac{2n+1}{n(n+2)}x+\dfrac{n+1}{n(n+2)^2}$ 在 x 轴上截得的线段长为 d_n, 则 $\sum\limits_{n=1}^{100}d_n=$ ________.

6. 若关于 x 的函数 $f(x)=\big|x-[x+a]\big|$ 存在最大值 $M(a)$, 则正实数 a 的取值范围是 ________, 其中 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数.

7. 如果 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时总有 $\sin x>kx$ 成立, 则实数 k 的取值范围是 ( ).

(A)$\left(-\infty,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (B)$\left(-\infty,\dfrac{\pi}{2}\right)$

(C)$\left(-\infty,\dfrac{2}{\pi}\right]$ (D)$\left(-\infty,\dfrac{2}{\pi}\right)$

8. 已知函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 将 $y=f(x)$ 的图像绕 $(1,-1)$ 逆时针旋转 90 度, 所得曲线的方程是 ( ).

(A)$y=f^{-1}(-x)-2$

(B)$y=-f^{-1}(-x)-2$

(C) $y=f^{-1}(-x+1)-1$

(D) $y=f^{-1}(-x-1)+1$

9. 已知函数 $y=f(x)$ 有反函数, 现将 $y=f(2x-1)$ 的图像向左平移 2 个单位, 所得图形表示的函数的反函数是 ( ).

(A)$y=\dfrac{-3+f^{-1}(x)}{2}$

(B)$y=\dfrac{-3-f^{-1}(x)}{2}$

(C)$y=\dfrac{3+f^{-1}(x)}{2}$

(D)$y=\dfrac{3-f^{-1}(x)}{2}$

10. 函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为 ________.

11. 求函数

$$f(x)=\frac{x^4+4x^3+17x^2+26x+106}{x^2+2x+7}$$

在区间 $[-1,1]$ 上的值域.

12. 若实数 x 满足不等式 $x^4-2x^3-7x^2+8x+12\leqslant 0$, 试求函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{4}{x}\right|$ 的最大值.

13. 当 $x\in[-3,3]$ 时, 函数 $f(x)=|x^3-3x|$ 的最大值为 ________.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,3]$ 上的减函数, 且对于 $x\in\mathbf{R}, f(a^2-\sin x)\leqslant f(a+1+\cos x^2)$ 恒成立. 则实数 a 的取值范围是 ________.

15. 求 $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$ 的最大值.

国内赛题

2012 年全国高中数学联赛江苏赛区初赛试题

一、填空题 (70 分)

1. 当 $x\in[-3,3]$ 时, 函数 $f(x)=\left|x^3-3x\right|$ 的最大值为 ________.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=12,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=-4$, 则 $AC=$________.

3. 从集合 $\{3,4,5,6,7,8\}$ 中随机选取 3 个不同的数, 这 3 个数可以构成等差数列的概率为 ________.

4. 已知 a 是实数, 方程 $x^2+(4+\mathrm{i})x+4+a\mathrm{i}=0$ 的一个实根是 b（i 是虚部单位）, 则 $\left|a+b\mathrm{i}\right|$ 的值为 ________.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的右焦点为 F, 一条过原点 O 且倾斜角为锐角的直线 l 与双曲线 C 交于 A,B 两点. 若 $\triangle FAB$ 的面积为 $8\sqrt{3}$, 则直线的斜率为 ________.

6. 已知 a 是正实数, $k=a^{\lg a}$ 的取值范围是 ________.

7. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB=AC=AD=DB=5$, $BC=3,CD=4$, 则该四面体的体积为 ________.

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $a_1+b_1=3,a_2+b_2=7,a_3+b_3=15,a_4+b_4=35$, 则 $a_n+b_n=$________$(n\in\mathbf{N}^*)$.

9. 将 $27,37,47,48,55,71,75$ 这 7 个数排成一列, 使任意连续 4 个数的和为 3 的倍数, 则这样的排列有 ________ 种.

10. 三角形的周长为 31, 三边 a,b,c 均为整数, 且 $a\leqslant b\leqslant c$, 则满足条件的三元数组 (a,b,c) 的个数为 ________.

二、解答题 (本题 80 分, 每题 20 分)

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 对应的边分别为 a,b,c, 证明:

(1)$b\cos C+c\cos B=a$;

(2)$\dfrac{\cos A+\cos B}{a+b}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{C}{2}}{c}$.

12. 已知 a,b 为实数, $a>2$, 函数 $f(x)=\left|\ln x-\dfrac{a}{x}\right|+b(x>0)$.

若 $f(1)=e+1,f(2)=\dfrac{e}{2}-\ln 2+1$.

(1) 求实数 a,b;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若实数 c,d 满足 $c>d,cd=1$, 求证: $f(c)<f(d)$.

13. 如图 1, 半径为 1 的圆 O 上有一定点 M, A 为圆 O 上的动点. 在射线 OM 上有一动点 B, $AB=1,OB>1$. 线段 AB 交圆 O 于另一点 C, D 为线段的 OB 中点. 求线段 CD 长的取值范围.

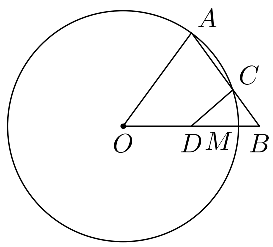


图 1

14. 设是 a,b,c,d 正整数,a,b 是方程 $x^2-(d-c)x+cd=0$ 的两个根. 证明: 存在边长是整数且面积为 ab 的直角三角形.

2012 年全国高中数学联赛四川赛区初赛试题

一、单项选择题 (本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

1. 设集合 $S=\{x|x^2-5x-6<0\}$, $T=\{x|\,|x+2|\leqslant 3\}$, 则 $S\cap T$=(　).

(A)$\{x|-5\leqslant x<-1\}$　(B)$\{x|-5\leqslant x<5\}$

(C)$\{x|-1<x\leqslant 1\}$　(D)$\{x|1\leqslant x<5\}$

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 BC_1 与截面 BB_1D_1D 所成的角是 (　).

(A)$\dfrac{\pi}{6}$　(B)$\dfrac{\pi}{4}$　(C)$\dfrac{\pi}{3}$　(D)$\dfrac{\pi}{2}$

3. 已知 $f(x)=x^2-2x+3$, $g(x)=kx-1$, 则"$|k|\leqslant 2$"是"$f(x)\geqslant g(x)$ 在 R 上恒成立"的 (　).

(A) 充分但不必要条件　(B) 必要但不充分条件 (C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

4. 设正三角形 $\triangle_1$ 的面积为 S_1, 作 $\triangle_1$ 的内切圆, 再作内切圆的内接正三角形, 设为 $\triangle_2$, 面积为 S_2, 如此下去作一系列的正三角形 $\triangle_3,\triangle_4,\cdots$, 其面积相应为 $\triangle_3,\triangle_4,\cdots$, 设 $S_1=1$,

$T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$=(　).

(A)$\dfrac{6}{5}$　(B)$\dfrac{4}{3}$　(C)$\dfrac{3}{2}$　(D)2

5. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 顶点为 O, M 是抛物线上的动点, 则 $\dfrac{|MO|}{|MF|}$ 的最大值为 (　).

(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(B)$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(C)$\dfrac{4}{3}$　(D)$\sqrt{3}$

6. 设倒圆锥形容器的轴截面为一个等边三角形, 在此容器内注入水, 并放入半径为 r 的一个实心球, 此时球与容器壁及水面恰好都相切, 则取出球后水面高为 (　).

(A)r　(B)$2r$　(C)$\sqrt[3]{12}r$　(D)$\sqrt[3]{15}r$

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

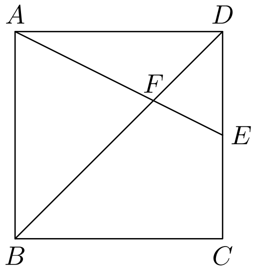


图 1

7. 如图 1, 正方形 $ABCD$ 的边长为 3, E 为 DC 的中点, AE 与 BD 相交于 F, 则 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{DE}$ 的值是 ________.

8. $\left(x^2+x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是 ________. (用具体数字作答)

9. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $S_n=\dfrac{(a_n+1)^2}{4}$, 则 S_{20} 的值为 ________.

10. 不超过 2012 的只有三个正因数的正整数个数为 ________.

11. 已知锐角 A,B 满足 $\tan(A+B)=2\tan A$, 则 $\tan B$ 的最大值是 ________.

12. 从 1,2,3,4,5 组成的数字不重复的五位数中, 任取一个五位数 $\overline{abcde}$, 满足条件"$a<b>c<d>e$"的概率是 ________.

三、解答题 (本大题共 4 个小题, 每小题 20 分, 共 80 分)

13. 设函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x+1$,

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值;

(II) 若实数 a,b,c 使得 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 求 $\dfrac{b\cos c}{a}$ 的值.

14. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$, 满足 $abc(a+b+c)=1$,

(I) 求 $S=(a+c)(b+c)$ 的最小值;

(II) 当 S 取最小值时, 求 c 的最大值.

15. 直线 $y=kx+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支交于 A、B 两点, 直线 l 经过点 $(-2,0)$ 和 AB 的中点, 求直线 l 在 y 轴的截距 b 的取值范围.

16. 设函数 $f_n(x)=x^n(1-x)^2$ 在 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上的最大值为 $a_n(n=1,2,3,\cdots)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求证: 对任何正整数 $n(n\geqslant 2)$, 都有 $a_n\leqslant\dfrac{1}{(n+2)^2}$ 成立;

(III) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求证: 对任意正整数 n, 都有 $S_n<\dfrac{7}{16}$ 成立.

2012 年浙江省高中数学竞赛试题

说明: 本试卷分为 A 卷和 B 卷: A 卷由本试卷的 22 题组成, 即 10 道选择题, 7 道填空题、3 道解答题和 2 道附加题; B 卷由本试卷的前 20 题组成, 即 10 道选择题, 7 道填空题和 3 道解答题.

一、选择题 (本大题共有 10 小题, 每题只有一个正确答案, 将正确答案的序号填入题干后的括号里, 多选、不选、错选均不得分, 每题 5 分, 共 50 分)

1. 已知 i 为虚数单位, 则复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2}=(\quad)$.

(A)i (B)$-$i (C)$-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (D)$-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

2. 下列函数中, 既是奇函数, 又在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增的函数为 ( ).

(A)$y=x^2+x$ (B)$y=x+2\sin x$

(C)$y=x^3+x$ (D)$y=\tan x$

3. 已知 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 均为单位向量, 其夹角为 θ, 则命题

$$p:|\mathbf{a}-\mathbf{b}|>1$$

是命题

$$q:\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$$

的 ( ).

(A) 充分非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充分且必要条件

(D) 非充分也非必要条件

4. 已知集合

$P=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$,

$M=\{x|2-a\leqslant x\leqslant 1+a\}$,

若 $P\cap M=P$, 则实数 a 的取值范围是 ( ).

(A)$(-\infty,1]$ (B)$[1,+\infty)$

(C)$[-1,1]$ (D)$[-1,+\infty)$

5. 函数

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

的最大值为 ( ).

(A)$\dfrac{13}{4}$ (B)$\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ (C)$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (D)$\sqrt{13}$

6. 如图 1, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为正方形, $SD\perp$ 底面 $ABCD$, 则下列结论中 不正确 的是 ( ).

(A)$AB\perp SA$

(B)BC平行于平面SAD

(C)BC 与 SA 所成的角等于 AD 与 SC 所成的角

(D)SA 与平面 SBD 所成的角等于 SC 与平面 SBD 所成的角

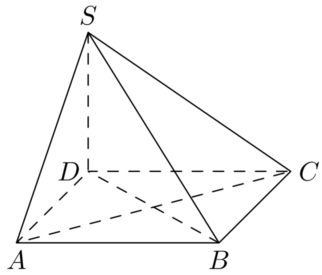
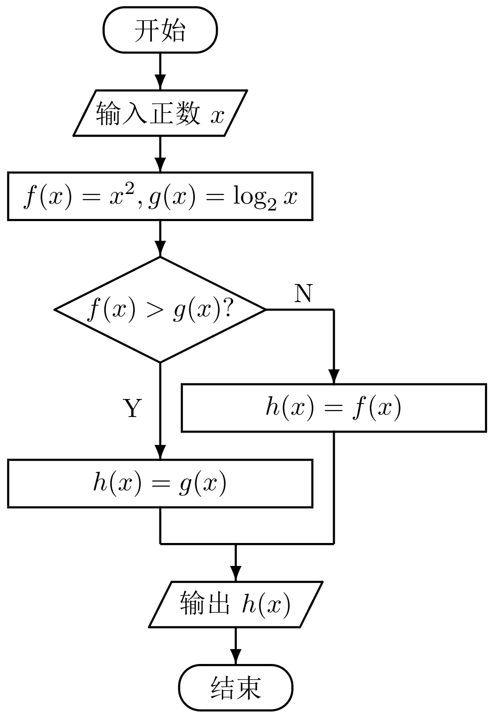


图 1

7. 程序框图如下图所示, 若 $f(x)=x^2$, $g(x)=\log_2 x$, 输入 x 的值为 0.25, 则输出结果为 ( ).

(A)0.24 (B)-2 (C)2 (D)-0.25



8. 设 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 分别表示平面直角坐标系 x,y 轴上的单位向量. 且 $|\mathbf{a}-\mathbf{i}|+|\mathbf{a}-2\mathbf{j}|=\sqrt{5}$, 则 $|\mathbf{a}+2\mathbf{i}|$ 的取值范围为 ( ).

(A)$[2\sqrt{2},3]$ (B)$\left[\dfrac{6\sqrt{5}}{5},2\sqrt{2}\right]$

(C)$[\sqrt{5},4]$ (D)$\left[\dfrac{6\sqrt{5}}{5},3\right]$

9. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点, 点 A 的坐标为 $\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{\sqrt{135}}{2}\right)$, 则 $\angle F_1AF_2$ 的平分线与 x 轴交点 M 的坐标为 ( ).

(A)$(2,0)$ (B)$(-2,0)$ (C)$(4,0)$ (D)$(-4,0)$

10. 设 $f(x)=x^2+bx+c$, 若方程 $f(x)=x$ 无实根, 则方程 $f(f(x))=x$( ).

(A) 有四个相异实根

(B) 有两个相异实根

(C) 有一个实根

(D) 无实根

二、填空题 (本大题共有 7 小题, 将正确答案填入题干后的横线上, 每空 7 分, 共 49 分)

11. 设直线 $y=ax-4$ 与 $y=8x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称, 则 $a=$ ____, $b=$ ____.

12. 已知 $\dfrac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|}=\sin x$, 则 $x=$ ____.

13. 已知 $x\in\mathbf{R}$, 则

$$\sqrt{x(x+1)}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}$$

的值为 ____.

14. 已知实数 a,b,c,d 满足 $ab=c^2+d^2=1$, 则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ____.

15. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且每项都大于 1, 则 $\lg a_1\lg a_{2012}\displaystyle\sum_{i=1}^{2011}\frac{1}{\lg a_i\lg a_{i+1}}$ 的值为 ____.

16. 设 $x>0$, 则

$$f(x)=\frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4-\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

的最小值为 ____.

17. 如图 2是一个残数的 3×3 的幻方, 此幻方每一行每一列以及每一条对角线上的三个数之和有相等的值, 则 x 的值为 ____.

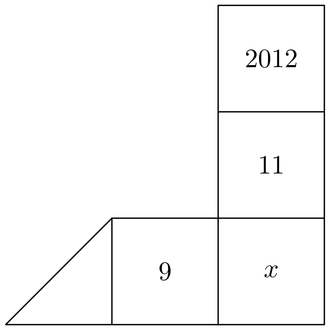


图 2

三、解答题 (本大题共有 3 小题, 每小题 17 分, 共计 51 分)

18. 已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{10}|x_i-1|\leqslant4,\ \sum_{i=1}^{10}|x_i-2|\leqslant6,$$

求 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的平均值 $\overline{x}$.

19. 设 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 长轴上一个动点, 过 P 点斜率为 k 直线交椭圆于 A,B 两点. 若 $|PA|^2+|PB|^2$ 的值仅依赖于 k 而与 P 无关, 求 k 的值.

20. 设 $p,q\in\mathbf{Z}^+$ 且 $q\leqslant p^2$.

试证对 $n\in\mathbf{Z}^+$, 存在 $N\in\mathbf{Z}^+$,

使 $(p-\sqrt{p^2-q})^n=N-\sqrt{N^2-q^n}$,

且 $(p+\sqrt{p^2-q})^n=N+\sqrt{N^2-q^n}$.

四、附加题 (本大题共有 2 小题, 每小题 25 分, 共计 50 分)

21. 设圆 O_4 与 O_1, 圆 O_1 与 O_2, 圆 O_2 与 O_3, 圆 O_3 与 O_4 分别外切于 P_1,P_2,P_3,P_4, 试证:

(1)P_1,P_2,P_3,P_4 四点共圆;

(2) 四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 是某个圆的外切四边形; 并且

(3) 该圆的半径不超过四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的外接圆的半径.

22. 设 $i_1,i_2,\cdots,i_{10}$ 为 $1,2,\cdots,10$ 的一个排列, 记 $S=|i_1-i_2|+|i_3-i_4|+\cdots+|i_9-i_{10}|$, 求 S 可以取到的所有值.

2012 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题 (本题满分 60 分, 前 4 小题每小题 7 分, 后 4 小题每小题 8 分)

1. 如图 1, 正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为 1, 它的 6 条对角线又围成一个正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, 如此继续下去, 则所有这些六边形的面积和是 ____.

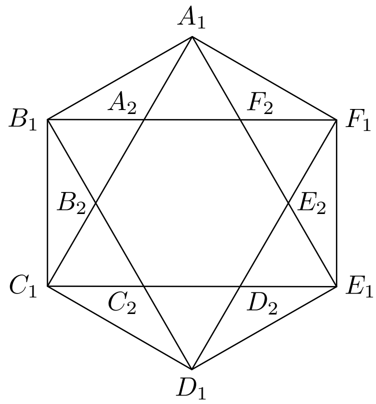


图 1

2. 已知正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 满足:$\dfrac{a_j}{a_i} > \dfrac{3}{2}, 1 \leqslant i < j \leqslant 10$, 则 a_{10} 的最小可能值是 ____.

3. 若 $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \dfrac{17}{6}$,
$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = -\dfrac{4}{5}$,
$\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = -\dfrac{17}{5}$,
则 $\tan(\alpha + \beta + \gamma) =$ ____.

4. 已知关于 x 的方程 $\lg(kx) = 2\lg(x+1)$ 仅有一个实数解, 则实数 k 的取值范围是 ____.

5. 如图 2, $\triangle AEF$ 是边长为 x 的正方形 $ABCD$ 的内接三角形, 已知 $\angle AEF = 90°$, $AE = a, EF = b, a > b$, 则 $x =$ ____.

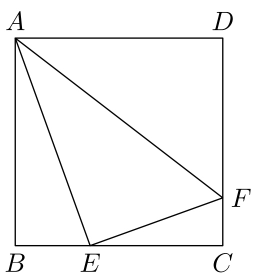


图 2

6. 方程 $2^m \cdot 3^n - 3^{n+1} + 2^m = 13$ 的非负整数解 $(m, n) =$ ____.

7. 一个口袋里有 5 个大小一样的小球, 其中两个是红色的, 两个是白色的, 一个是黑色的, 依次从中摸出 5 个小球, 相邻两个小球的颜色均不相同的概率是 ____(用数字作答).

8. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:
$a_1 = 1, a_2 = 2$,
$a_{n+2} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}a_{n+1} - \dfrac{n}{n+2}a_n$,
$n = 1, 2, \cdots$.
若 $a_m > 2 + \dfrac{2011}{2012}$, 则正整数 m 的最小值为 ____.

二、解答题

9. (本题满分 14 分) 如图 3, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = x, BC = 1$, 对角线 AC 与 BD 的夹角 $\angle BOC = 45°$, 记直线 AB 与 CD 的距离为 $h(x)$.

求 $h(x)$ 的表达式, 并写出 x 的取值范围.

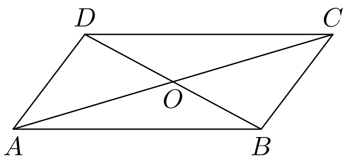


图 3

10. (本题满分 14 分) 给定实数 $a > 1$, 求函数 $f(x) = \dfrac{(a+\sin x)(4+\sin x)}{1+\sin x}$ 的最小值.

11. (本题满分 16 分) 正实数 x, y, z 满足
$9xyz + xy + yz + zx = 4$,
求证:
(1)$xy + yz + zx \geqslant \dfrac{4}{3}$;
(2)$x + y + z \geqslant 2$.

12. (本题满分 16 分) 给定整数 $n(\geqslant 3)$, 记 $f(n)$ 为集合 $\{1, 2, \cdots, 2^n - 1\}$ 的满足如下两个条件的子集 A 的元素个数的最小值:

(a)$1 \in A, 2^n - 1 \in A$;

(b)A 中的元素 (除 1 外) 均为 A 中的另两个 (可以相同) 元素的和.

(1) 求 $f(3)$ 的值;

(2) 求证: $f(100) \leqslant 108$.

国外赛题

2011 印度地区数学奥林匹克试题

1. $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别在线段 BC, CA, AB 上, AD, BE, CF 交于一点 K, 且 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BF}{FA}$, $\angle ADB=\angle AFC$.

求证: $\angle ABE=\angle CAD$.

2. 设 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{2011} 是 1, 2, 3, $\cdots$, 2011 的一个排列.

求证: 存在两个数 j, k, 使得 $1\leqslant j<k\leqslant 2011$, 且 $|a_j-j|=|a_k-k|$.

3. 自然数 n 介于两个连续完全平方数之间. 其中较小的平方数为 $n-k$, 较大的平方数为 $n+l$. 求证: $n-kl$ 为完全平方数.

4. 凸 20 边形 K 的顶点依次为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{20}.

求 K 的三条边的组合的个数, 使得三边组中的每两边之间至少还有 K 的其它两条边. 例如 $(A_1A_2, A_4A_5, A_{11}A_{12})$ 满足条件, 但 $(A_1A_2, A_4A_5, A_{19}A_{20})$ 不满足条件.

5. $\triangle ABC$ 中, BB_1, CC_1 分别是 $\angle B, \angle C$ 的平分线, B_1 在 AC 上, C_1 在 AB 上, $AE\perp BB_1$ 于 E, $AF\perp CC_1$ 于 F. D 是 $\triangle ABC$ 的内切圆切 AB 的切点.

求证: $AD=EF$.

6. 求所有的实数对 (x,y), 使得 $16^{x^2+y}+16^{x+y^2}=1$.

2011/12 年英国数学奥林匹克第一轮试题

1. 求所有的整数 n, 使得 $n^2+20n+11$ 是完全平方数.

2. 将 1, 2, $\cdots$, n 重新排成一行, 使得连续项至少相差 t. 求最大整数 t.

3. 给定圆 S. 点 P 位于圆 S 外, 过点 P 的一条直线交圆 S 于两点 X, Y. 过 P 的两圆 S_1, S_2 分别切圆 S 于 X, Y.

求证: 圆 S_1, S_2 的半径之差与点 P, X, Y 的位置无关.

4. 一个包里有 m 个球, 另一个包里有 n 个球, 其中 $m, n>0$. 允许进行下面两种不同操作:

(a) 从每个包里取出相同数目的球;

(b) 把一个包里的球的数目翻一番.

问经有限次操作能否使得两个包都取空?

若将操作 (b) 改为“(c) 把一个包里的球的数目变成原来的三倍”, 则经有限次操作能否使得两个包都取空?

5. 求证: 四个连续正整数的积不能等于两个连续正整数的积.

6. 锐角 $\triangle ABC$ 中, AD, BE, CF 是其三条高线.

求证: $DE+DF\leqslant BC$, 并确定等号成立的条件.

2012 年俄罗斯数学奥林匹克九年级试题

1. $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ 是不小于 2 的互异正整数, 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 407$.

是否存在正整数 n, 使得当 n 分别除以 $a_1, a_2, \cdots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \cdots, 4a_{11}$ 这 22 个数时所得到的余数的和等于 2012?

2. 已知在正 2012 边形的顶点中, 存在 k 个顶点, 使得以这 k 个顶点为顶点的凸 k 边形的任意两条边不平行. 求 k 的最大值.

3. $ABCD$ 是一个平行四边形, 角 A 为钝角. H 是点 A 向直线 BC 的垂直投影. 三角形 ABC 过顶点 C 的中线的延长线交其外接圆于 K.

求证: K, H, C, D 四点共圆.

4. 正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, k$ 满足:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3k,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 3k^2,$$

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 3k^3 + k.$$

求证: 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中存在两个数使得它们的差的绝对值大于 1.

5. 101 个智者围坐一圈开圆桌会议讨论地球和木星谁绕谁转的问题. 开始及随后的每个时刻每个智者持有地球绕木星转或木星绕地地球转这两种观点之一. 各智者按以下规则每分钟一次同时宣布自己的观点: 除了第一次以外, 如果在上一分钟时一个智者的相邻两人 (左右各一人) 与其观点都不相同, 则智者改变自己的观点, 否则不改变自己的观点. 求证: 若干分钟后, 所有的人都不再改变自己的观点.

6. A_1, B_1, C_1 分别是三角形 ABC 的边 BC, CA, AB 上的点, 满足 $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. I_A, I_B 和 I_C 分别是三角形 AB_1C_1, A_1BC_1 和 A_1B_1C 的内心. 求证: 三角形 $I_AI_BI_C$ 的外心与三角形 ABC 的内心重合.

7. 开始时黑板上写着 10 个连续正整数. 对黑板上的数进行如下操作: 任取黑板上的两个数 a 和 b, 将它们用数 $a^2 - 2011b^2$ 和 ab 替换. 经过若干次上述操作后, 黑板上开始时的 10 个数已全部被替换掉, 问此时在黑板上是否可能还是 10 个连续的正整数?

8. 城市里有若干路公共汽车线. 已知任两路公共汽车线恰有一个公共的车站; 任一路公共汽车线至少有 4 站. 求证: 可以将所有的车站分成不交的两组, 使得任意一路公共汽车线含每组中至少一站.

2012 年欧洲女子数学奥林匹克试题

1. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O, 点 D,E,F 分别位于边 BC,CA,AB 上, 使得 DE 垂直于 CO, DF 垂直于 BO(D 在 BC 上意为点 D 在直线 BC 上且 D 在 B,C 之间), 若 K 是 $\triangle AFE$ 的外心, 证明: DK 垂直于 BC.

2. n 是正整数, 求最大可能的正整数 m, 使得 m,n 满足下列条件: 一个 m 行 n 列的表格, 在每空格内填入一个实数, 且对于任意两个不同行 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 有:

$$\max\left(\left|a_1-b_1\right|,\left|a_2-b_2\right|,\cdots,\left|a_n-b_n\right|\right)=1.$$

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且 $x,y\in\mathbb{R}$, 满足

$$f\left(yf(x+y)+f(x)\right)=4x+2yf(x+y).$$

4. 整数集 A, 如果满足 $A\subset A+A$, 那么把 A 称为“和闭的”, 也就是说: 对于每一个 $a\in A$ 可表示为 b 与 c 之和 ($b,c\in A$ 且 b,c 可以相同), 如果 0 是不能表示为 A 的一个有限非空子集中所有元素之和的唯一整数, 则整数集 A 被称为“零和自由的”. 问是否存在一个整数集, 既是“和闭的”又是“零和自由的”?

5. p,q 为质数, 满足 $\dfrac{p}{p+1}+\dfrac{q+1}{q}=\dfrac{2n}{n+2}$, 对某个正整数 n 成立. 求所有可能的 $q-p$ 的值.

6. 有无限多个人在社交网站 Mugbook 上注册, 有几对不同用户互相注册为好友, 但每个人只有有限多个好友, 且至少有一个好友 (好友是相互的, 比如 A 是 B 的好友, B 也是 A 的好友). 每个人被要求指定他的一个好友作为最佳好友, 如果 A 指定 B 作为最佳好友, 那么 (不幸的是)B 不一定指定 A 作为最佳好友. 某人如果被指定为最佳好友, 那么称他为“一级最佳朋友”.

一般的, $n>1$ 是正整数, 如果一个用户被指定为某个 $n-1$ 级最佳朋友的最佳朋友, 则该用户是“n 级最佳朋友”, 如果某人对于任意正整数 k, 是 k 级最佳朋友, 则该用户被称为“受欢迎的人”.

(1) 证明: 每一个受欢迎的人是另一个受欢迎的人的最佳朋友;

(2) 若每个人可有无限多个朋友, 那么是否有可能一个受欢迎的人不是另一个受欢迎的人的最佳朋友.

7. $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 它的外接圆为 Γ, 垂心为 H. 令 K 是圆 Γ 上的一点, 且 K 与 A 在 BC 的异侧; 令 L 是 K 关于直线 AB 的对称点, M 是 K 关于直线 BC 的对称点, E 是圆 Γ 和 $\triangle BLM$ 的外接圆的第二个交点.

证明: KH,EM,BC 共点.

8. 一个单词是某些字母的有限排列, 如果一个单词是由至少两个相同的子单词串联而成, 称该单词为“重复的”, 如 $ababab$ 和 $abcabc$ 是“重复的”, 而 $ababa$ 和 $aabb$ 则不是.

证明: 如果交换一个单词中任意两个相邻字母, 得到的新单词都是“重复的”,

那么原单词各个字母相同 (可交换两个相同的相邻字母, 则新、旧单词相同).

数学贴吧

有奖探究问题

主持人: 李 红 李 潜

欢迎你到论坛数学贴吧讨论区 (http://www.omaths.com/bbs/index.asp?boardid=234) 参与讨论, 讨论问题回帖可以发到邮箱 mathclub@163.com, 我们会择优评奖, 并在后期杂志上发表获奖解答.

题 1. 能否把一个正方体分割成 54 个小正方体?

(编辑部 供题)

题 2. 已知半径分别为 a、b、c 三个球两两相切, 两个相异平面 α、β 分别与这三球都相切, 记 α 与 β 所成二面角为 θ.

试证 $\cos\theta = 3 - 2\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc\,(a+b+c)}$.

(邬天泉 浙江台州市椒江中学)

题 3. 设 $x, y \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, 求证:

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{x+xy} + \frac{x}{1+xy} + \frac{xy}{1+x} \leqslant \frac{19}{10}.$$

(安振平 陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心)

《学数学》征稿启事

《学数学》以“探索数学学习本源, 研究数学思想方法, 关注数学发展动态, 拓展数学学习视野”为宗旨, 传播数学文化, 探究压轴经典, 聚焦自主招生, 关注竞赛动态.

我们考虑读者使用杂志的便利性, 决定以专辑形式出版发行; 同时考虑读者使用的时效性, 安排如下的编辑出版计划:

第 01, 02 **月**: 综合学习; **第** 03, 04 **月**: 高考复习; **第** 05, 06 **月**: 综合学习;

第 07, 08 **月**: 高考研究; **第** 09, 10 **月**: 数学竞赛; **第** 11, 12 **月**: 自主招生.

我们热忱欢迎广大作者为各个专辑相关栏目撰稿, 特别欢迎适合高中生阅读的、内容充实的专题讲座和解题指导性文章. 来稿时请注意以下各项:

1. 来稿请标注所投专辑, 专题应附有相应练习题, 并给出答案或提示.
2. 文中例题最好选用国内高考试题 (含模拟试题)、国内外大学自主招生试题、世界各国各级高中竞赛试题, 并请标出试题全称、届次和时间.
3. 凡为本刊数学考场和数学贴吧栏目提供的稿件, 试题内容范围以高中数学课程标准、数学竞赛大纲为准; 题目要有新意 (如用成题, 必须改编), 并注明是自编或改编, 改编题须注明原题出处.
4. 来稿不要一稿多投, 文责自负, 允许编辑修改, 所有刊登稿件, 出版社付稿酬, 版权归出版社所有.

《学数学》征订启事

《学数学》杂志是高中学生学习数学课程参加高考、准备参加自主招生考试、角逐全国高中数学联赛等各级数学竞赛的得力助手. 她是学生研究数学的工具, 学好数学的宝典; 她是高中数学教师教学的伴侣, 竞赛辅导的参考资料.

《学数学》杂志以“探索数学学习本源, 研究数学思想方法, 关注数学发展动态, 拓展数学学习视野”为宗旨, 传播数学文化, 探究压轴经典, 聚焦自主招生, 关注竞赛动态. 2012 年 7 月我们首先发布电子试刊号, 热忱欢迎读者提出你们的宝贵意见与建议.

我们考虑读者使用杂志的便利性, 决定以专辑形式出版发行; 同时考虑读者使用的时效性, 安排如下的编辑出版计划:

第 01, 02 **月**: 综合学习; **第** 03, 04 **月**: 高考复习; **第** 05, 06 **月**: 综合学习;

第 07, 08 **月**: 高考研究; **第** 09, 10 **月**: 数学竞赛; **第** 11, 12 **月**: 自主招生.

特别赠送信息速递 PDF 版电子刊, 读者可以通过学数学电子信息速递 (http://www.omaths.com/bbs 顶部右侧) 的链接进行邮件订阅. 我们将通过此项服务, 为读者提供及时的国内外著名大学自主招生政策、数学课外活动和数学竞赛的试题等相关信息.

本刊每期 48 页, 定价人民币 5 元, 邮购单册 7 元 (含邮挂费); 大量订阅请直接与编辑部联系.

学 数 学

专辑月刊

(2012 年 9 月创刊)

刊名题字: 单 墫

2012 年电子刊第 1 期

(2012 年 7 月 7 日出版)

主办单位: 香港鹏博文化传播有限公司
地　　址: 香港九龙旺角道 33 号凯途发展大厦 7 楼 04 室
编辑出版: 鹏博出版社学数学编辑部
顾　　问: 单 墫
社　　长: 费振鹏
主　　编: 李 红
杂志网址: www.omaths.com
投稿邮箱: xsx@omaths.com
订阅邮箱: fzp@omaths.com, mathclub@163.com.