

BAB 5

FUNGSI

MATERI YANG DIBAHAS

- A. DEFINISI FUNGSI
- B. NOTASI FUNGSI
- C. DAERAH ASAL DAN DAERAH HASIL
- D. GRAFIK FUNGSI
- E. FUNGSI GENAP DAN GANJIL
- F. OPERASI FUNGSI
- G. KOMPOSISI FUNGSI
- H. FUNGSI TRIGONOMETRI

Bayangkan suatu fungsi sebuah senapan. Fungsi ini mengambil amunisi dari suatu himpunan yang dinamakan daerah asal (daerah definisi, domain) dan menembakkannya pada suatu himpunan sasaran. Setiap peluru mengenai sebuah titik sasaran tunggal, tetapi dapat terjadi bahwa beberapa peluru dapat mendarat pada titik yang sama. Kita dapat menyatakan definisi secara formal dan memperkenalkan beberapa cara penulisan secara bersamaan.



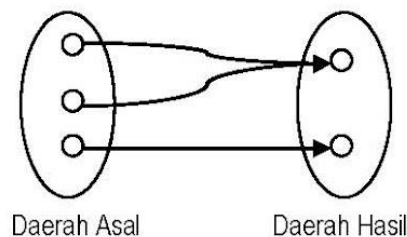
A. Definisi fungsi

Ada dua buah definisi

1. Sebuah fungsi adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (jelaiah) fungsi tersebut.
2. Suatu fungsi adalah suatu himpunan pasangan terurut bilangan (x, y) dimana tidak terdapat dua pasangan berbeda yang bilangan pertamanya sama. Himpunan semua nilai x yang mungkin dinamakan daerah asal (domain) fungsi, dan himpunan semua nilai y yang dihasilkan dinamakan daerah nilai (range/jelajah/daerah hasil) fungsi.

Dari kedua definisi di atas diambil garis besarnya adalah:

Suatu himpunan pasangan terurut bilangan (x, y) dimana tidak terdapat dua pasangan berbeda yang bilangan pertamanya sama. Tiap objek x dalam satu himpunan pertama, yang disebut daerah asal (domain) dihubungkan dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua yang dinamakan daerah nilai (range/jelajah/hasil).



B. Notasi Fungsi

Dipakai sebuah huruf tunggal seperti f atau g atau F . Maka $f(x)$ dibaca “ f dari x ” atau “ f pada x ” menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x .

Contoh 1. Jika $f(x) = x^3 - 4$, hitunglah $f(2)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(a+h)$

Penyelesaiannya :

$$f(2) = (2)^3 - 4 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a+h) = (a+h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Contoh 2. Jika $f(x) = x^2 - 2x$, hitunglah $f(4)$, $f(4+h)$, $f(4+h) - f(4)$,

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

Penyelesaiannya :

$$f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8$$

$$f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 8 + 6h + h^2$$

$$f(4+h) - f(4) = 8 + 6h + h^2 - 8 = 6h + h^2$$

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$



Contoh 3. Jika $g(x) = \frac{1}{x}$, hitunglah, $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$

Penyelesaiannya :

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a^2 + ah}$$

LATIHAN

Selesaikanlah

1. Untuk $f(x) = x^2 - 1$, hitunglah $f(1)$, $f(-2)$, $f(k)$, $f(0)$, $f(-6)$,
 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2t)$, $f(3x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Untuk $F(x) = 3x^3 + x$, hitunglah $F(-6)$, $F(3,2)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F(\sqrt{3})$,
 $F(\pi)$, $F\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Untuk $G(y) = \frac{1}{y-1}$, hitunglah $G(0)$, $G(0,9999)$, $G(1,01)$, $G(y^2)$,
 $G(-x)$, $G\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

4. Untuk $\phi(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$, hitunglah $\phi(0)$, $\phi\left(\frac{1}{4}\right)$, $\phi(x^3)$, $\phi(x+2)$, $\phi(-t)$,
 $\phi\left(\frac{1}{z^4}\right)$.



5. Untuk $f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x + 1$ dan
 $f(x) = \{[(x+3)x-6]x+2\}x+1$ hitunglah $f(0,32)$, $f(\pi)$, $f(3+\sqrt{2})$.
6. Untuk $g(x) = x^5 - 5x^3 + 2x^2 - \pi x + \sqrt{3}$ dan
 $g(x) = \{(x^2-5)x+2\}x-\pi\}x+\sqrt{3}$ hitunglah $g(-1,71)$, $g(3,01)$,
 $g(\sqrt{3})$.
7. Untuk $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x-\sqrt{3}}$ hitunglah $f(0,79)$, $f(12,26)$, $f(\sqrt{3})$.
8. Untuk $G(t) = t^{2/3} - 4\sqrt{t}$ hitunglah $G(1,46)$, $G(\pi)$, $G(-1,23)$.
9. Untuk $f(x) = 2x^2 - 1$, cari dan sederhanakanlah, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
10. Untuk $F(x) = 4t^3$, cari dan sederhanakanlah, $\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$.
11. Untuk $g(u) = \frac{3}{u-2}$, cari dan sederhanakanlah, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.
12. Untuk $G(t) = \frac{t}{t+4}$, cari dan sederhanakanlah, $\frac{G(a+h)-G(a)}{h}$.

C. Daerah Asal dan Daerah Hasil

Definisi Daerah Asal

Daerah asal adalah himpunan – himpunan elemen – elemen pada mana fungsi itu mendapat nilai

Definisi Daerah Hasil

Himpunan nilai – nilai yang diperoleh secara demikian



Contoh 1. F adalah fungsi dengan aturan $F(x) = x^2 + 1$. Daerah asalnya $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Carilah daerah hasilnya.

Penyelesaiannya :

Daerah hasilnya $\{1, 2, 5, 10\}$

Bilamana daerah asalnya tidak dirinci kita selalu menganggap bahwa daerah asalnya adalah himpunan bilangan riil yang terbesar sehingga aturan fungsi ada maknanya dan memberikan nilai bilangan riil. Daerah asal ini disebut **daerah asal mula (domain natural)**.

Contoh 2. Carilah daerah asal mula (Natural) untuk :

1. $f(x) = \frac{1}{x-3}$,

2. $g(t) = \sqrt{9-t^2}$

Penyelesaiannya :

1. Daerah asal untuk $f(x) = \frac{1}{x-3}$ adalah $\{x | x \in R, x \neq 3\}$ dibaca “

Himpunan x dan R (Bilangan riil) sedemikian rupa sehingga x tidak sama dengan 3 “.

2. Harus membatasi t sedemikian rupa sehingga $9 - t^2 \geq 0$ $g(t) = \sqrt{9-t^2}$ dengan tujuan menghindari bilangan imajiner sehingga $\{t \in R; |t| \leq 3\}$, dalam bentuk intervalnya $[-3, 3]$



Persamaan $y = f(x)$, dimana x disebut variable bebas dan y disebut variable tak bebas.

Sebarang elemen dari daerah asal boleh dipilih sebagai nilai dari variable bebas x , tetapi pilihan itu menentukan nilai dari variable tak bebas y . Jadi nilai y tergantung dari pilihan nilai x .

LATIHAN

Tentukan daerah asalnya

1. $f(x) = \sqrt{x-4}$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$.
3. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
4. $f(x) = \sqrt{x+1}$.
5. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
6. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
7. $f(x) = (x-1)^2 + 2$.
8. $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
9. $f(x) = (x+2)^3 - 1$.
10. $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2-x-6}$.
11. $G(y) = \sqrt{(y+1)^{-1}}$.



$$12. \phi(u) = |2u + 3|.$$

$$13. F(t) = t^{2/3} - 4.$$

$$14. F(z) = \sqrt{2z + 3}.$$

$$15. g(v) = \frac{1}{4v - 1}.$$

$$16. \psi(x) = \sqrt{x^2 - 9}.$$

$$17. H(y) = -\sqrt{625 - y^4}$$

D. Grafik Fungsi

Bilamana daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan bilangan riil, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat. Dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

Contoh 1. Buatlah sketsa grafik dari :

$$1. f(x) = x^2 - 2$$

$$2. g(x) = x^3 - 2x$$

$$3. h(x) = \frac{2}{x - 1}$$

Penyelesaiannya :

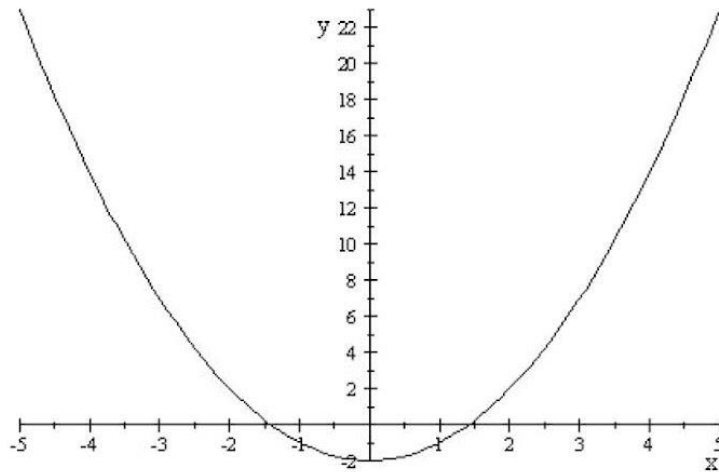
$$1. f(x) = x^2 - 2$$

Daerah asal $\{x | x \in R\}$



Daerah hasil $\{y|y \in R; y \geq -2\}$

Grafiknya :

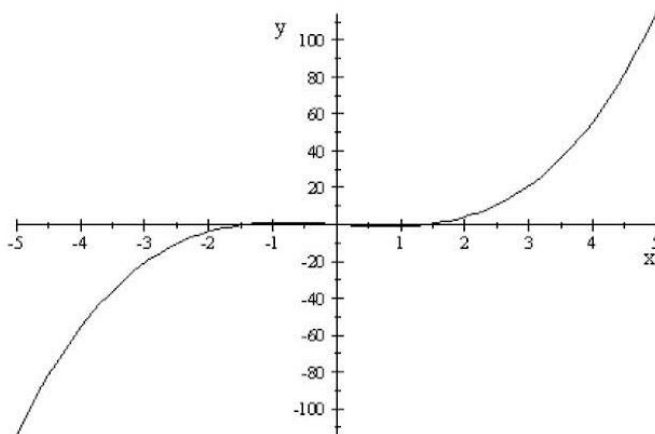


2. $g(x) = x^3 - 2x$

Daerah asal $\{x|x \in R\}$

Daerah hasil $\{y|y \in R\}$

Grafiknya :

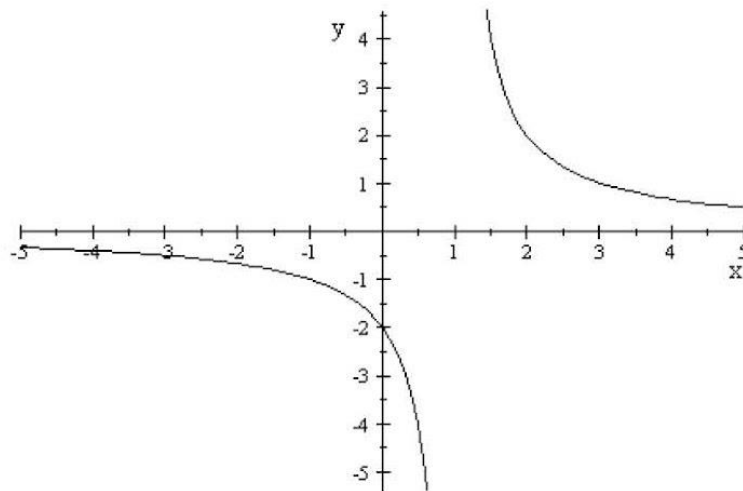


3. $h(x) = \frac{2}{x-1}$

Daerah asal $\{x|x \in R; x \neq 1\}$

Daerah hasil $\{y|y \in R; y \neq 0\}$

Grafiknya :



Hasil diatas menggunakan daerah asal mula (domain natural). Untuk no. 1 dan 2 daerah asalnya semua bilangan riil. Untuk no. 3 semua anggota bilangan riil kecuali 1.

Untuk grafik $h(x) = \frac{2}{x-1}$, jelas bahwa sesuatu yang dramatis harus terjadi bila x mendekati 1.

$$h(0,99) = -200 ; h(1,001) = 2000$$

Ditarik garis tegak putus – putus yang disebut asimtot pada $x=1$. Bila x mendekati 1, grafik semakin mendekati garis walaupun garis ini bukan



merupakan bagian dari grafik, hanya suatu garis petunjuk. Grafik tersebut mempunyai asimtot mendatar yakni sumbu x .

LATIHAN

Tentukan daerah asal, daerah hasil, dan buatlah grafiknya.

1. $f(x) = 3x$.

2. $F(x) = 2x + 1$.

3. $F(x) = 3x - \sqrt{2}$.

4. $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

5. $g(u) = \frac{u^3}{8}$.

6. $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

7. $\phi(z) = \frac{2z + 1}{z - 1}$.

8. $f(w) = \sqrt{w - i}$.

9. $f(x) = |2x|$.

10. $F(x)t = -|t + 3|$.

11. $g(x) = 5x^2 - 4$.

12. $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$.



$$13. \quad g(r) = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}.$$

$$14. \quad g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}.$$

$$15. \quad f(y) = \frac{y^3 - y}{y^2 + 1}.$$

$$16. \quad f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x + 3}}.$$

$$17. \quad f(x) = \pi x^3 - 3\pi.$$

$$18. \quad f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}.$$

$$19. \quad g(x) = x^{-2} + 2x^{-1} + 3.$$

$$20. \quad g(x) = \left(\frac{1}{x + 2} \right)^{-2}.$$

E. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Definisi Fungsi Genap

Suatu fungsi f dikatakan fungsi genap jika setiap x di daerah asal

$$f, f(-x) = f(x)$$

Definisi Fungsi Ganjil

Suatu fungsi f dikatakan fungsi ganjil jika setiap x di daerah asal

$$f, f(-x) = -f(x)$$



Dari kedua definisi ini dapat dipahami bilamana x terletak pada daerah asal f , maka $-x$ juga.

Contoh . Tentukan apakah fungsi – fungsi dibawah ini genap, ganjil atau bukan keduanya.

1. $f(x) = x^2 - 2$

2. $g(x) = x^3 - 2x$

3. $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

Penyelesaiannya :

1. $f(x) = x^2 - 2$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 \text{ (Fungsi Genap)}$$

2. $g(x) = x^3 - 2x$

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) \text{ (Fungsi Ganjil)}$$

3. $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

$$h(-x) = 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9$$

$$h(-x) = 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \text{ (Fungsi bukan keduanya)}$$

LATIHAN

Dari latihan pada sub pokok bahasan “Grafik Fungsi” pada halaman 11 dan 12 nyatakanlah apakah fungsi yang diberikan genap, ganjil atau bukan keduanya.



F. Operasi Fungsi

Operasi yang ada adalah penjumlahan, selisih, hasil kali, hasil bagi, dan pangkat.

Bentuk dari operasinya adalah sebagai berikut :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ dimana } g(x) \neq 0$$

Dengan f^n , kita maksudkan fungsi yang memberikan nilai $[f(x)]^n$ pada x .

Pengecualian jika $n = -1$ maka f^{-1} merupakan fungsi invers bukan berarti

$$\frac{1}{f}.$$

Contoh 1. Suatu fungsi $f(x) = \frac{x-3}{2}$ dan $g(x) = \sqrt{x}$, carilah $f + g$, $f - g$,

$f \times g$, $\frac{f}{g}$, dan f^2 dan daerah asalnya.

Penyelesaiannya :

$$f(x) = \frac{x-3}{2}, \text{ daerah asalnya } \{x | x \in R\}$$

$$g(x) = \sqrt{x}, \text{ daerah asalnya } \{x | x \in R; x \geq 0\}$$

$$(f + g)(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}, \text{ daerah asalnya } \{x | x \in R; x \geq 0\}$$



$$(f - g)(x) = \frac{x-3}{2} - \sqrt{x}, \text{ daerah asalnya } \{x|x \in R; x \geq 0\}$$

$$(f \times g)(x) = \frac{x-3}{2} \times \sqrt{x}, \text{ daerah asalnya } \{x|x \in R; x \geq 0\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-3}{2\sqrt{x}}, \text{ daerah asalnya } \{x|x \in R; x > 0\}$$

$$f^2(x) = [f(x)]^2 = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = \frac{x^2 - 6x + 9}{4} \text{ daerah asalnya } \{x|x \in R\}$$

LATIHAN

1. Untuk $f(x) = \frac{x}{x-1}$ dan $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, carilah $(f+g)(2)$,

$(f-g)(1)$, $f \times g$, $\left(\frac{g}{f}\right)(3)$, f^2 dan daerah asalnya.

2. Untuk $F(x) = x^2 + x$ dan $G(x) = \frac{2}{x+3}$, carilah $F+G$, $(F-G)(2)$,

$F \times G$, $\frac{F}{G}$, $G^2(3)$ dan daerah asalnya.

3. Untuk $f(x) = x^3 + 2$ dan $g(x) = \frac{2}{x-1}$, carilah $f+g$, $(f-g)(2)$,

$f \times g$, $\left(\frac{g}{f}\right)(2)$, $g^2(5)$ dan daerah asalnya.



4. Untuk $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$, carilah $f^4 + g^4$, $(f - g)^2$, $f \times g$, $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$, dan daerah asalnya.
5. Untuk $f(x) = \sqrt{x - 4}$ dan $g(x) = |x|$, carilah $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, dan daerah asalnya.
6. Untuk $g(x) = x^2 + 1$, carilah $g + g$, $g - g$, $g \times g$, $\frac{g}{g}$, g^2 dan daerah asalnya.
7. Carilah $f + g$, $f - g$, $f \times g$, f/g , g/f untuk soal-soal berikut:
- $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$.
 - $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$.
 - $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$.
 - $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$.
 - $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$.
 - $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$.
 - $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$.
 - $f(x) = \sqrt{x + 4}$; $g(x) = x^2 - 4$.
 - $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \frac{x}{x-2}$.



j. $f(x) = x^2; g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

8. Hitunglah $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + x}}{1 + x^3} \right)^5 (3,12)$.

9. Hitunglah $g(x) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^4}{1 - x + x^2} (2,03)$.

10. Hitunglah $\sqrt{f^2(3,46) + 4f(3,46)}$ jika $f(x) = \frac{1}{x}$.

11. Hitunglah $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$ jika $g(x) = 6x - 11$.

G. Komposisi Fungsi

Bayangkan sebuah fungsi sebagai suatu mesin. Fungsi ini menerima x sebagai masukan, bekerja pada x dan menghasilkan $f(x)$ sebagai keluaran. Dua mesin seringkali dapat diletakkan berdampingan untuk membuat sebuah mesin yang rumit. Demikian juga halnya dengan dua fungsi f dan g .

Jika f bekerja pada x untuk menghasilkan $f(x)$ dan kemudian g bekerja pada $f(x)$ untuk menghasilkan $g(f(x))$, dikatakan bahwa kita telah menyusun g dengan f . Fungsi yang dihasilkan disebut komposit g dengan f , dinyatakan oleh $g \circ f$, jadi :

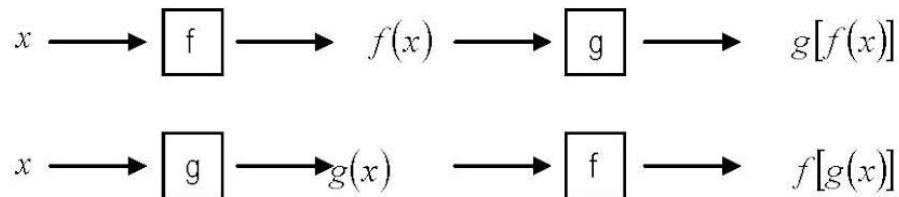
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Fungsi komposisi yang dinyatakan $f \circ g$ didefinisikan oleh :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



Dan daerah asal $f \circ g$ adalah himpunan semua bilangan x di daerah asal g sehingga $g(x)$ di daerah asal f .



Contoh 1. Suatu fungsi $f(x) = \frac{6x}{(x^2 - 9)}$ dan $g(x) = \sqrt{3x}$, carilah $(f \circ g)(12)$ dan $(f \circ g)(x)$ dan berikan daerah asalnya.

Penyelesaian :

$$(f \circ g)(12) = f(g(12)) = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{3x})$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2 - 9}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2\sqrt{3x}}{x-3}, \text{ daerah asalnya } [0,3) \text{ dan } (3,\infty)$$

Contoh 2. Suatu fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = 2x - 3$, carilah $(f \circ g)(x)$ dan daerah asalnya.

Penyelesaian :



$$(f \circ g)(12) = f(g(12)) = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{3x})$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2 - 9}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2\sqrt{3x}}{x-3}, \text{ daerah asalnya } [0,3) \text{ dan } (3, \infty)$$

Contoh 3. Tuliskan fungsi $p(x) = (x+2)^5$ sebagai sebuah fungsi komposit $g \circ f$.

Penyelesaian :

Cara yang paling mudah untuk melakukannya adalah menuliskan:

$$p(x) = g(f(x)) \text{ dengan } g(x) = x^5 \text{ dan } f(x) = x+2$$

LATIHAN

1. Untuk $f(x) = \frac{x}{x-1}$ dan $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, carilah $(f \circ g)(\sqrt{8})$, $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(0)$ dan daerah asalnya.
2. Untuk $F(x) = x^2 + x$ dan $G(x) = \frac{2}{x+3}$, carilah $(g \circ f)(1)$, $(f \circ g)(1)$, $(g \circ g)(3)$, dan daerah asalnya.



3. Untuk $f(x) = x^3 + 2$ dan $g(x) = \frac{2}{x-1}$, carilah $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, dan daerah asalnya.
4. Untuk $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$, carilah $(f \circ g)(4)$, $(f \circ g)^2$, $(g \circ f)(x)$, dan daerah asalnya.
5. Untuk $f(x) = \sqrt{x-4}$ dan $g(x) = |x|$, carilah $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, dan daerah asalnya.
6. Untuk $g(x) = x^2 + 1$, carilah $(g \circ g \circ g)(x)$, dan daerah asalnya.
7. Carilah $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ untuk soal-soal berikut:
 - a. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$.
 - b. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$.
 - c. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$.
 - d. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$.
 - e. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$.
 - f. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$.
 - g. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$.
 - h. $f(x) = \sqrt{x+4}$; $g(x) = x^2 - 4$.
 - i. $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \frac{x}{x-2}$.



j. $f(x) = x^2; g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

8. Hitunglah $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + x}}{1 + x^3} \right)^5 (3,12)$.

9. Hitunglah $g(x) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^4}{1 - x + x^2} (2,03)$.

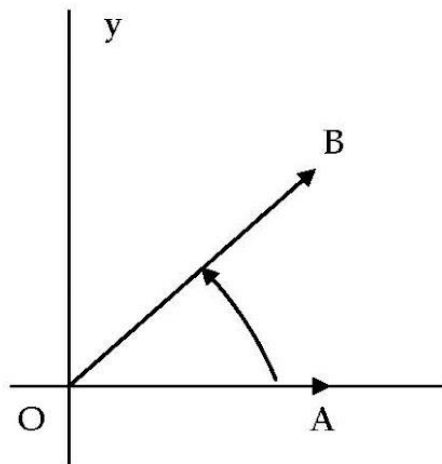
10. Hitunglah $\sqrt{f^2(3,46) + 4f(3,46)}$ jika $f(x) = \frac{1}{x}$.

11. Hitunglah $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$ jika $g(x) = 6x - 11$.

H. Fungsi Trigonometri

1. Definisi Fungsi Trigonometri

Fungsi ini didefinisikan dalam ukuran radian

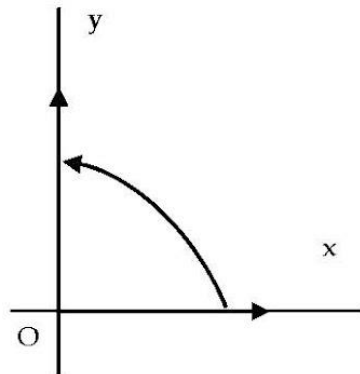


Misalkan AOB adalah suatu sudut dalam posisi baku dan $|\overline{OA}| = 1$. Jika s satuan adalah panjang busur lingkaran yang ditempuh titik A bila sisi awal OA diputar ke sisi terminal OB maka ukuran radian t dari sudut AOB ditentukan oleh :

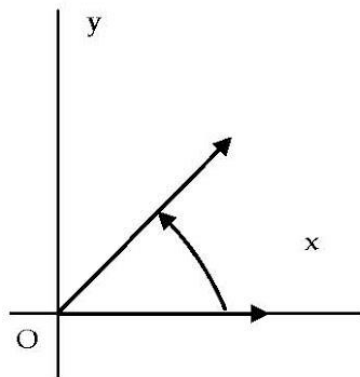
- $t = s$, bila putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam.
- $t = -s$, bila putarannya searah dengan arah putaran jarum jam.

Ukuran panjang keliling suatu lingkaran 2π . Beberapa contoh ukuran – ukuran sudutnya

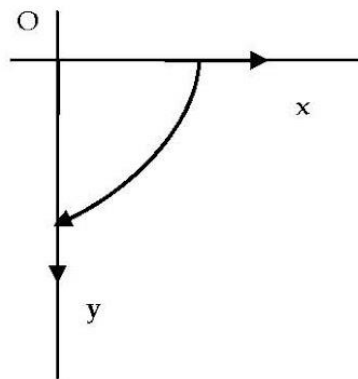
- $\frac{1}{2}\pi$,



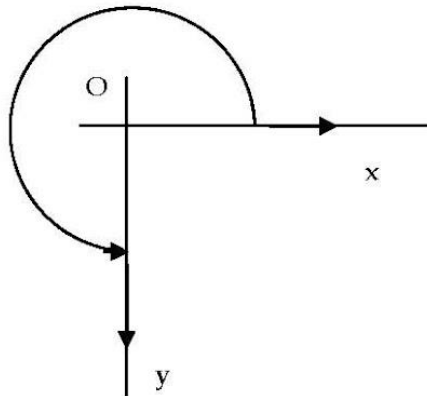
- $\frac{1}{4}\pi$,



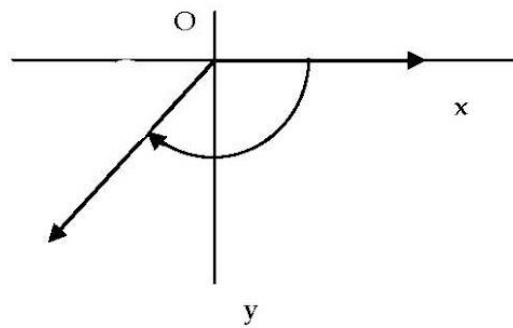
c. $-\frac{1}{2}\pi$,



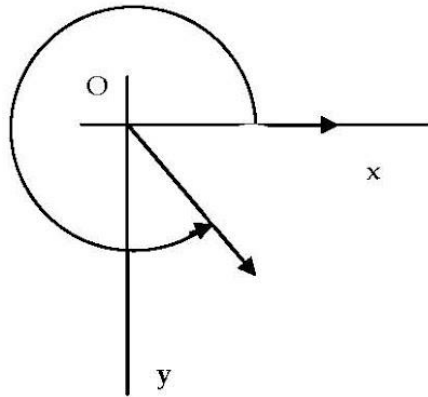
d. $\frac{3}{2}\pi$,



e. $-\frac{3}{4}\pi$,



f. $\frac{7}{4}\pi$.



2. Ukuran derajat dan radian dan hubungannya dengan trigonometri sudut.

Sudut 360° sama dengan 2π radian

Sudut 180° sama dengan π radian

$$1^\circ \approx \frac{1}{180} \pi \text{ radian}$$

$$1 \text{ rad} \approx \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 18'$$

Contoh 1. Rubahlah 162° dalam bentuk radian.

Penyelesaian:

$$162^\circ = 162 \times \frac{1}{180} \pi \text{ rad} = \frac{9}{10} \pi \text{ rad}.$$

Contoh 2. Rubahlah $\frac{5}{12} \pi \text{ rad}$ dalam bentuk derajat.

Penyelesaian:



$$\frac{5}{12} \pi \text{ rad} = \frac{5}{12} \pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ$$

Pembagian suatu putaran menjadi 360 bagian dilakukan oleh suatu bangsa Babylon kuno, yang menyenangi kelipatan 60. Pembagian ke dalam 2π bagian lebih mendasar dan berlatar belakang pada pemakaian ukuran radian yang umum dalam kalkulus. Panjang busur s dari potongan busur sebuah lingkaran radius r dengan sudut pusat t radian adalah:

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{t}{2\pi}$$

Sehingga

$$s = r \times t$$

dengan:

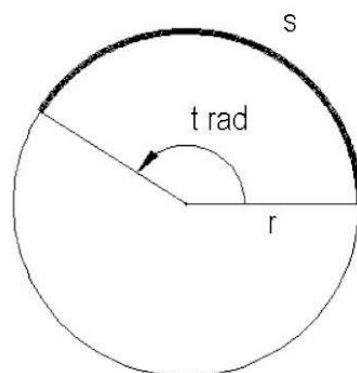
r = radius,

t = besarnya sudut (dalam radian (π)).

Bila $r = 1$, ini memberikan $s = t$. Dengan kalimat, *panjang busur pada potongan lingkaran satuan dengan sudut pusat t radian adalah t .*

Tabel.

Derajat	Radian
0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
120	$2\pi/3$
135	$3\pi/4$



150	$5\pi/6$
180	π

Contoh 3. Cari jarak yang ditempuh oleh sebuah sepeda dengan roda yang mempunyai radius 30 centimeter bila roda itu berputar sampai 100 putaran.

Penyelesaian:

$$100 \text{ putaran} = 100 \times (2\pi)$$

dengan menggunakan rumus di atas maka:

$$s = (30) \times 100 \times (2\pi) = 6000\pi$$

$$s = 18849,6 \text{ centimeter.}$$

Hubungan antara trigonometri sudut dengan trigonometri lingkaran satuan adalah:

$$\sin \theta = \sin t \text{ dan } \cos \theta = \cos t$$

dimana θ adalah sudut yang berukuran t radian.

Contoh 4. Cari $\sin 31,6^\circ$.

Penyelesaian:

$$\sin 31,6^\circ = \sin \left(31,6 \times \frac{1}{180} \pi \text{ rad} \right) \approx \sin(0,552) \approx 0,524$$

Contoh 4. Cari $\cos 51,8^\circ$.

$$\cos 51,8^\circ = \cos \left(51,8 \times \frac{1}{180} \pi \text{ rad} \right) \approx \cos(0,904) \approx 0,6184$$

LATIHAN



Konversikan ke dalam bentuk $\pi \text{ rad}$.

1. 240° .
2. -135° .
3. 600° .
4. -60° .
5. 540° .
6. 720° .
7. 18° .
8. $22,5^\circ$.
9. 6° .

Konversikan ke dalam bentuk derajat.

10. $\frac{7}{6}\pi \text{ rad}$.
11. $-\frac{1}{3}\pi \text{ rad}$.
12. $\frac{5}{4}\pi \text{ rad}$.
13. $\frac{3}{2}\pi \text{ rad}$.
14. $-\frac{11}{12}\pi \text{ rad}$.
15. $\frac{1}{18}\pi \text{ rad}$.



16. $\frac{7}{4}\pi \text{ rad}.$

17. $-\frac{1}{5}\pi \text{ rad}.$

Konversikan ke dalam bentuk $\text{rad}.$

18. $33,3^\circ.$

19. $-391,4^\circ.$

20. $471,5^\circ.$

21. $14,9^\circ.$

22. $4,02^\circ.$

23. $-1,52^\circ.$

Konversikan ke dalam bentuk derajat.

24. $1,51.$

25. $-3,1416.$

26. $2,31.$

27. $34,25.$

28. $-0,002.$

Hitunglah (Soal dalam bentuk radian)

29. $\sin(0,452).$

30. $\cos(0,452).$

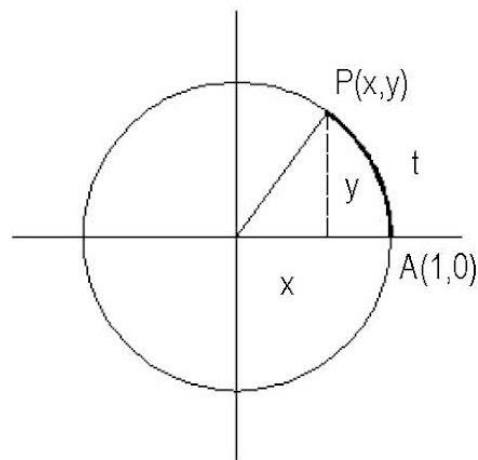
31. $\tan(0,452).$

32. $\sin(-0,361).$



33. $\cos(-0,361)$.
34. $\tan(-0,361)$.
35. $\frac{234,1 \times \sin(1,56)}{\cos(0,34)}$.
36. $\sin^2(2,51) + \sqrt{\cos(0,51)}$.
37. $\frac{56,3 \times \tan(34,2^\circ)}{\sin(56,1^\circ)}$.
38. $\left(\frac{\sin 35^\circ}{\sin 26^\circ + \cos 26^\circ} \right)^3$.

3. Fungsi Sinus dan Cosinus Untuk Suatu Bilangan Riil



Misalkan t suatu bilangan riil. Tempatkan suatu sudut dengan ukuran radian t pada posisi baku dan misalkan titik P adalah perpotongan sisi



terminal sudut tersebut dengan lingkaran satuan yang berpusat di titik asal.

Jika P adalah titik (x, y) , maka fungsi cosinus didefinisikan oleh:

$$\cos t = x$$

dan fungsi sinus didefinisikan oleh:

$$\sin t = y.$$

Nilai terbesar dari keduanya adalah 1 dan nilai terkecil dari keduanya adalah -1, maka daerah hasilnya adalah $[-1, 1]$.

Tabelnya

t	$\sin t = y$	$\cos t = x$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$1/2\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{2}$
$\pi/3$	$1/2\sqrt{3}$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$1/2\sqrt{3}$	$-1/2$
$3\pi/4$	$1/2\sqrt{2}$	$-1/2\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
π	0	-1
$3\pi/2$	-1	0
2π	0	1

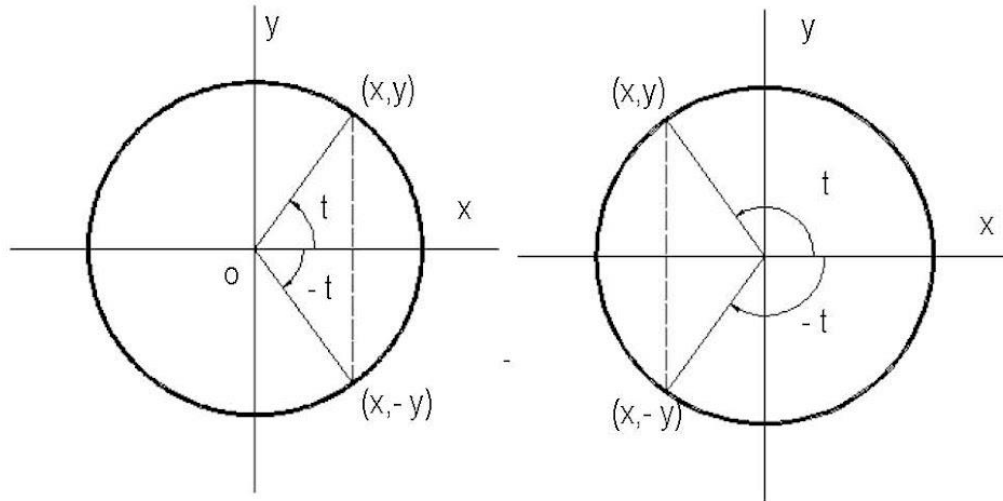
Suatu persamaan lingkaran satuan yang berpusat di titik asal adalah

$x^2 + y^2 = 1$. Karena $x = \cos t$ dan $y = \sin t$, maka:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



4. Sudut Yang Ukuran Radiannya Negatif ($-t$).



Dari gambar di atas, maka:

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$

Dalam perkataan lain, fungsi sinus adalah fungsi ganjil dan fungsi cosines adalah fungsi genap.

5. Suatu Fungsi f periodic

Suatu fungsi f dikatakan periodik jika terdapat suatu bilangan riil $p \neq 0$ sehingga bilamana x di daerah asal f , maka $x + p$ juga di daerah asal f dan

$$f(x + p) = f(x)$$

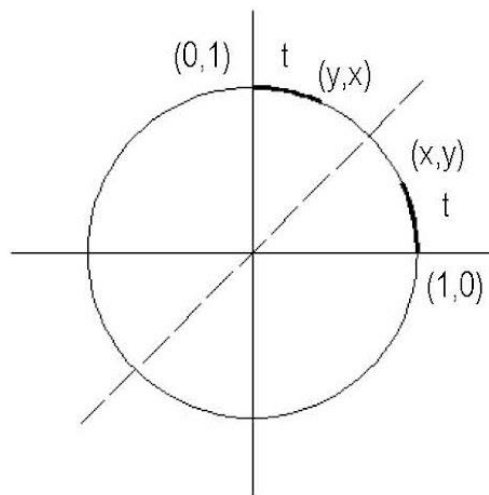


Bilangan p dinamakan periode f . Periode positif terkecil dinamakan periode dasar.

Contoh 1. Karena t dan $t+2\pi$ menentukan titik $P(x, y)$ yang sama maka:

$$\sin(t+2\pi) = \sin t$$

$$\cos(t+2\pi) = \cos t$$



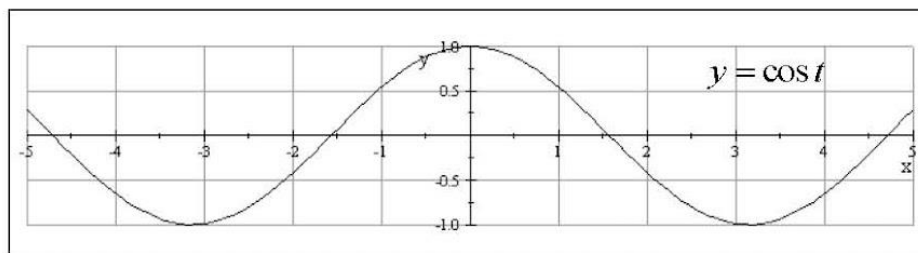
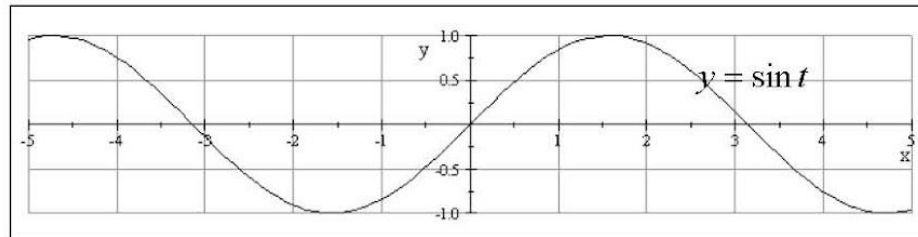
Titik-titik P yang berada pada t dan $\pi/2-t$ simetri terhadap garis $y = x$, maka koordinatnya saling bertukar sehingga:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t \text{ dan}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$$



6. Grafik Sinus dan Kosinus



Gambar di atas merupakan gambar grafik sinus dan cosinus. Empat hal tentang grafik-grafik ini:

- $\sin t$ dan $\cos t$ keduanya berkisar dari -1 sampai 1.
- Kedua grafik berulang dengan sendirinya pada selang yang berdampingan sepanjang 2π .
- Grafik $y = \sin t$ simetri terhadap titik asal dan $y = \cos t$ simetri terhadap sumbu y .
- Grafik $y = \sin t$ sama seperti $y = \cos t$, tetapi digeser $\pi/2$ satuan ke kanan.



7. Empat Fungsi Trigonometri Lainnya

Empat fungsi trigonometri tambahan yaitu tangent, kotangen, sekan, dan kosekan.

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}.$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

Contoh 1. Buktikan bahwa tangent adalah fungsi ganjil.

Penyelesaian:

$$\tan(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)}.$$

$$\tan(-t) = \frac{-\sin t}{\cos t}.$$

$$\tan(-t) = -\tan t.$$

Contoh 2. Buktikan bahwa $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$.

Penyelesaian:

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}.$$

$$1 + \tan^2 t = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}.$$



$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

Contoh 3. Buktikan bahwa $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$.

$$1 + \cot^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

$$1 + \cot^2 t = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

$$1 + \cot^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

8. Ringkasan fungsi trigonometri yang penting.

Kesamaan ganjil-genap

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

$$\cos(-x) = \cos x.$$

$$\tan(-x) = -\tan x.$$

Kesamaan ko fungsi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$



Kesamaan Pythagoras.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

Kesamaan penambahan.

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Kesamaan sudut ganda.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Kesamaan setengah sudut.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Kesamaan jumlah.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Kesamaan hasil kali



$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

LATIHAN

Buktikanlah

$$1. (1 + \sin z)(1 - \sin z) = \frac{1}{\sec^2 z}.$$

$$2. (\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t.$$

$$3. \sec t - \sin t \tan t = \cos t.$$

$$4. \frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sin^2 t.$$

$$5. \cos t(\tan t + \cos t) = \csc t.$$

$$6. \frac{\sin u}{\csc u} + \frac{\cos u}{\sec u} = 1.$$

$$7. (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x) = 1.$$

$$8. \sin t(\csc t - \sin t) = \cos^2 t.$$

$$9. \frac{1 - \csc^2 t}{\csc^2 t} = \frac{-1}{\sec^2 t}.$$

$$10. \frac{1}{\sin t \cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} = \tan t.$$

Buatlah grafiknya untuk soal berikut dengan batas $[-\pi, 2\pi]$.



11. $y = \sec t$.
12. $y = 3 \sin t$.
13. $y = \sin 2t$.
14. $y = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.
15. $y = \csc t$.
16. $y = 2 \cos t$.
17. $y = \cos 3t$.
18. $y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Carilah koordinat dari nilai t dibawah ini dalam satu buah grafik. (Satuan $t = \pi \text{ rad}$).

19. $t = 5,97$.
20. $t = 9,34$.
21. $t = -16,1$
22. $t = 4,34$.
23. $t = -15$.
24. $t = 21,9$.

Tentukanlah soal-soal dibawah ini, mana yang fungsi ganjil, genap, atau bukan keduanya

25. $\sec t$.
26. $\csc t$.



27. $t \sin t$.
28. $x \cos x$.
29. $\sin^2 x$.
30. $\sin x + \cos x$.
31. Buktikan bahwa $\cos(x - \pi) = -\cos x$ untuk semua x .
32. Cari panjang busur sebuah lingkaran radius 2,5 centimeter yang dipotong oleh tiap sudut pusat sebuah ban pada sebuah mobil mempunyai
 - a. 6 radian.
 - b. 225° .
33. Seberapa jauh sebuah roda radius 2 kaki menggelinding sepanjang permukaan tanah dalam membuat 150 putaran ?
34. Andaikan sebuah ban pada sebuah mobil mempunyai garis tengah luar 2,5 kaki. Berapa putaran tiap menit yang dibuat oleh ban bilamana mobil meluncur pada kecepatan 60 mil/jam ?
35. Sebuah tali kipas melingkari dua roda. Diameter roda 1 = 8 inchi dan roda 2 = 6 inchi. Berapa banyak putaran yang dilakukan tiap detik oleh roda 2 bilamana roda 1 membuat 21 putaran tiap detik ?

