

MATERI YANG DIBAHAS

- A. GRAFIK FUNGSI
- B. PENDAHULUAN LIMIT
- C. LIMIT KIRI DAN KANAN (LIMIT SEPIHAK)
- D. TEOREMA LIMIT FUNGSI
- E. LIMIT TAK BERHINGGA
- F. KEKONTINUAN FUNGSI DI SUATU TITIK
- G. KEKONTINUAN FUNGSI KOMPOSISI DAN KEKONTINUAN PADA SUATU SELANG
- H. KEKONTINUAN FUNGSI TRIGONOMETRI DAN TEOREMA APIT

A. Grafik Fungsi

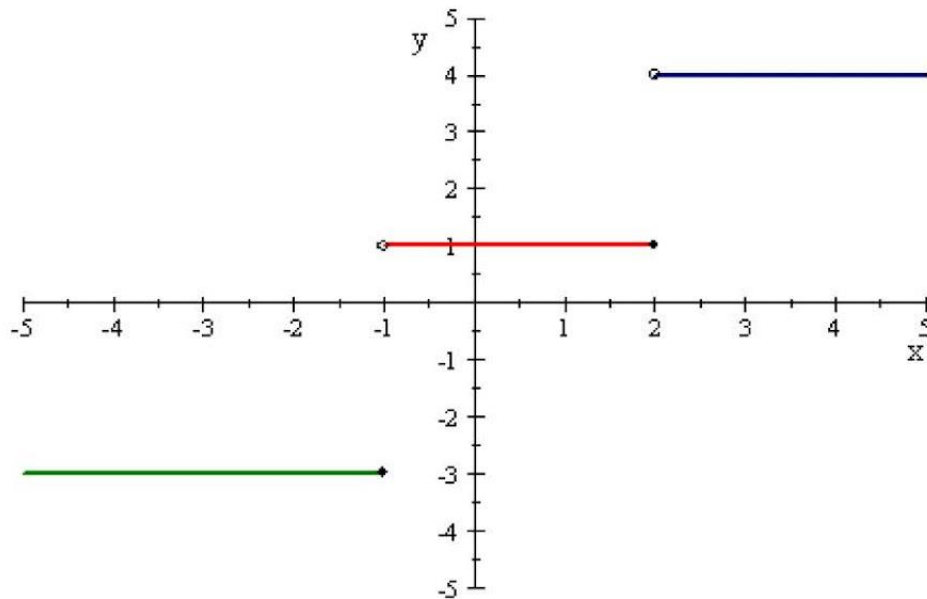
Pada bab 5 telah dijelaskan mengenai grafik fungsi. Pada kesempatan ini adalah beberapa contoh mengenai grafik fungsi.



Gambarkan sketsa grafiknya dan tentukan daerah asal dan daerah nilainya.

Contoh 1. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{jika } x \leq -1 \\ 1 & \text{jika } -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{jika } x > 2 \end{cases}$

Sketsa grafiknya



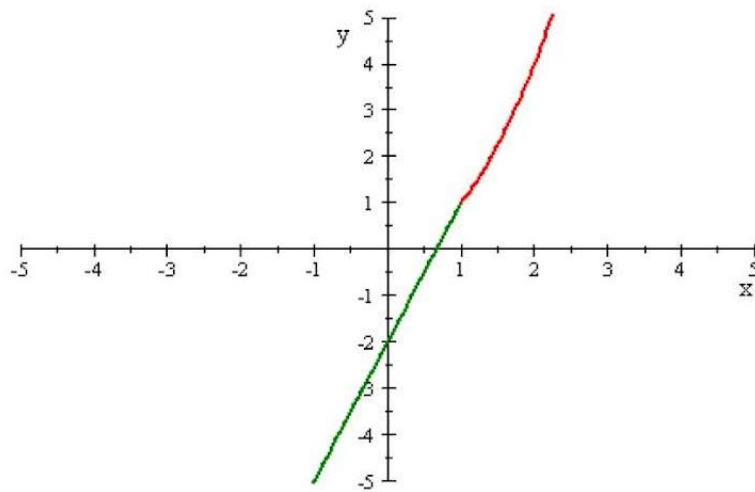
Daerah asalnya $\{x | x \in R\}$ intervalnya $(-\infty, \infty)$.

Daerah hasilnya $\{f(x) | f(x) = -3, 1, 4\}$ intervalnya $(-3, 1, 4)$.

Contoh 2. $g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{jika } x < 1 \\ x^2 & \text{jika } 1 \leq x \end{cases}$



Sketsa grafiknya

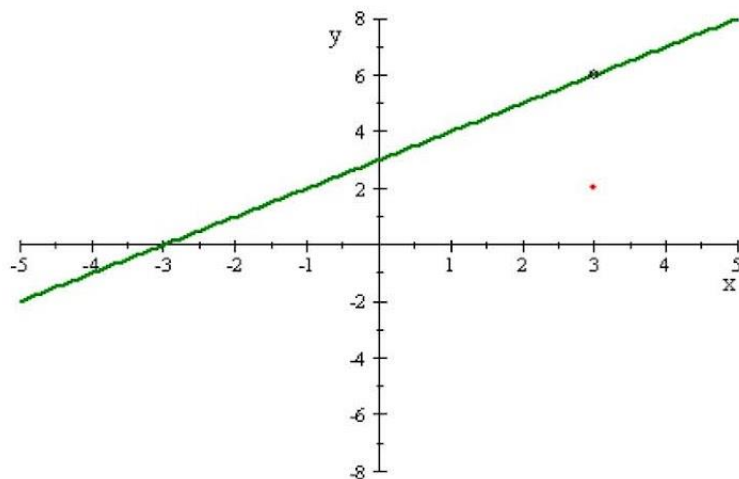


Daerah asalnya $\{x|x \in R\}$ intervalnya $(-\infty, \infty)$.

Daerah asalnya $\{f(x)|f(x) \in R\}$ intervalnya $(-\infty, \infty)$.

Contoh 3.
$$H(x) = \begin{cases} x+3 & \text{jika } x \neq 3 \\ 2 & \text{jika } x = 3 \end{cases}$$

Sketsa grafiknya

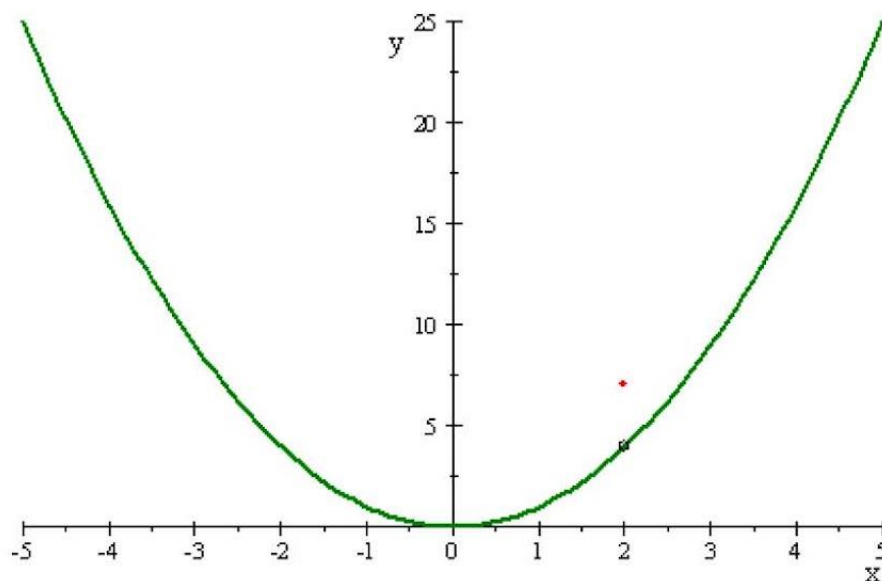


Daerah asalnya $\{x|x \in R\}$ intervalnya $(-\infty, \infty)$.

Daerah asalnya $\{f(x)|f(x) \in R; f(x) \neq 6\}$ intervalnya $(-\infty, \infty)$.

Contoh 4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \neq 2 \\ 7 & \text{jika } x = 2 \end{cases}$.

Sketsa grafiknya



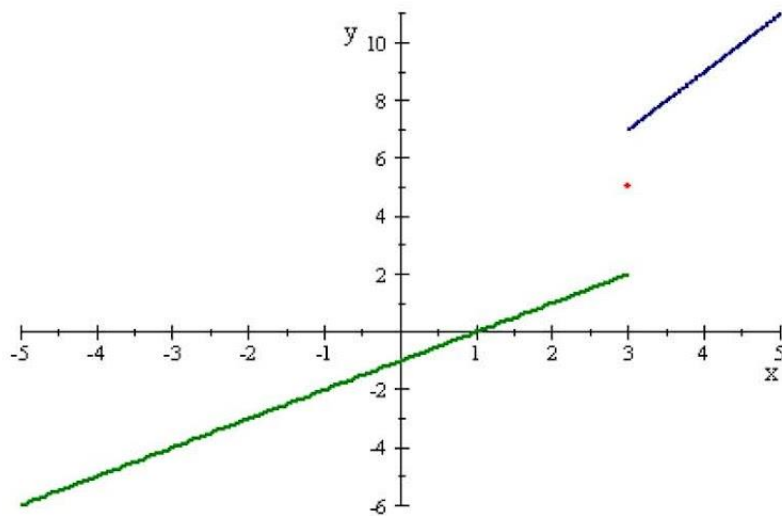
Daerah asalnya $\{x|x \in R\}$ intervalnya $(-\infty, \infty)$.

Daerah asalnya $\{f(x)|f(x) > 0\}$ intervalnya $(0, \infty)$.

Contoh 5. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{jika } x < 3 \\ 5 & \text{jika } x = 3 \\ 2x+1 & \text{jika } x > 3 \end{cases}$.



Sketsa grafiknya



Daerah asalnya $\{x|x \in R\}$ intervalnya $(-\infty, \infty)$.

Daerah hasil $\{f(x)|f(x) < 2; f(x) = 5; f(x) > 7\}$ intervalnya $5 \cup (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$.

B. Pendahuluan Limit

Perkataan limit dipergunakan dalam bahasa sehari-hari.

"Saya mendekati batas kesabaran saya".

Pemahaman secara intuitif

Suatu fungsi

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$



Fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = 1$ dimana $\frac{0}{0} = \text{tak terdefinisi}$. Secara

lebih tepat, apakah $f(x)$ mendekati beberapa bilangan tertentu bilamana x mendekati 1 ?

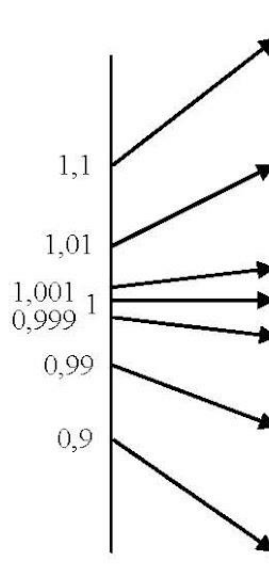
Tiga hal yang dapat dilakukan:

1. Menghitung beberapa nilai x dekat 1 dalam bentuk tabel.
2. Menunjukkan nilai-nilai tersebut dalam sebuah diagram skematis.
3. Membuat sketsa grafik $y = f(x)$.

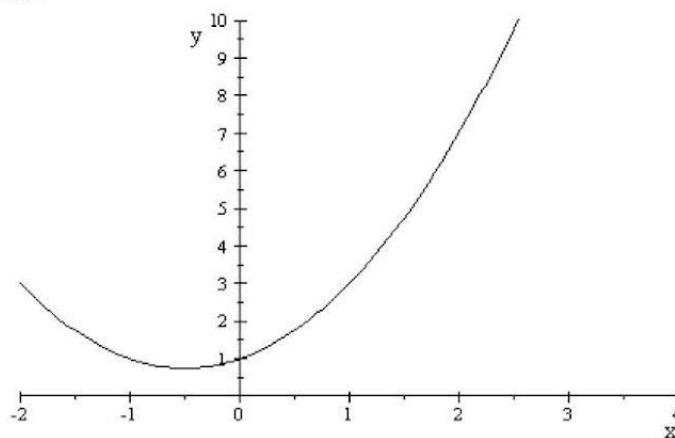
Tabel

x	y
1,25	3,813
1,1	3,31
1,01	3,030
1,001	3,003
1	?
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,71
0,75	2,313

Diagram skematis



Grafik



Semua hal tersebut di atas menunjukkan ke kesimpulan yang sama $f(x)$ mendekati 3 bilamana x mendekati 1.

Dalam lambang matematisnya

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Dibaca

“Limit dari $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 3.

Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x = 1.$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Bahwa $\frac{x-1}{x-1} = 1$ selama $x \neq 1$.

Definisi Limit (Pengertiannya secara intuitif)

“Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tapi berlainan dari c , maka $f(x)$ dekat ke L ”.

Kita tidak mensyaratkan sesuatu agar tepat benar di c . Fungsi f bahkan tidak perlu terdefinisi di c . Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan **perilaku suatu fungsi dekat c , bukannya di c** .

Contoh 1. Cari $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5)$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$$

Contoh 2. Cari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

Contoh 3. Cari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Penyelesaian:



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

Contoh 4. Cari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan kalkulator hitunglah nilai $\frac{\sin x}{x}$ pada tabel berdasarkan

nilai x yang ada. (Mode radian)

x	$\frac{\sin x}{x}$
1	0,84147
0,5	0,95885
0,1	0,99833
0,01	0,99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	0,99998
-0,1	0,99833
-0,5	0,95885
-1,0	0,84147

Dari table tersebut diatas di dapat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Contoh 5. Cari $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 - \frac{\cos x}{10000} \right]$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan kalkulator hitunglah nilai $\left[x^2 - \frac{\cos x}{10000} \right]$ pada tabel berdasarkan nilai x yang ada. (Mode radian)

x	$\left[x^2 - \frac{\cos x}{10000} \right]$
± 1	0,99995
$\pm 0,5$	0,24991
$\pm 0,1$	0,00990
$\pm 0,01$	0,00000000005
\downarrow	\downarrow
0	?

Kesimpulan yang di dapat dari tabel di atas, limit yang diinginkan adalah 0. Jika kita ingat kembali bahwa grafik $y = \cos x$ untuk $\cos x$ mendekati 1 jika $x = 0$. Jadi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 - \frac{\cos x}{10000} \right] = 0^2 - \frac{1}{10000} = -\frac{1}{10000}$$

LATIHAN

Carilah limit dari

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.



$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 16x}{x^2 + 4x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x - 4}{x - 3}.$$

$$9. \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 56t + 6}{t^2 - t - 2}.$$

$$10. \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 + 6u - 7}{u^2 - 1}.$$

Carilah penyelesaian limit di bawah ini (gunakan kalkulator dalam mode radian).

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{0}.$$



$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$15. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t^2}.$$

$$16. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

C. Limit kiri dan kanan (limit sepihak)

Definisi

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kanan c , maka $f(x)$ adalah dekat ke L . Serupa untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kiri c , maka $f(x)$ adalah dekat ke L .

Teoremanya

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = L$.

Contoh 1. Suatu fungsi $f(x) = \sqrt{x}$. Tentukanlah apakah $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ itu ada?

Penyelesaian:



$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \phi$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. Karena $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ maka

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{tidak ada}$. Maka $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ disebut limit sepihak dari kanan.

Contoh 2. Suatu fungsi $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ dengan batas $-3 \leq x \leq 3$.

Tentukanlah apakah $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ itu ada jika $a = 3$?

Penyelesaian:

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{9 - x^2} = \phi$. Karena $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ maka

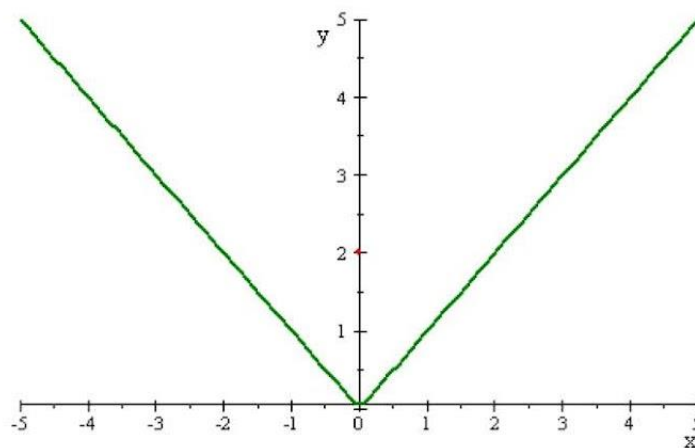
$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{tidak ada}$. Maka $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ disebut limit sepihak dari kiri.

Contoh 3. Suatu fungsi $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{jika } x \neq 0 \\ 2 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$

1. Gambarkan sketsanya.
2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, bila ada.

Penyelesaian:

1. Gambar sketsanya.



2. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0.$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = ada = 0$.

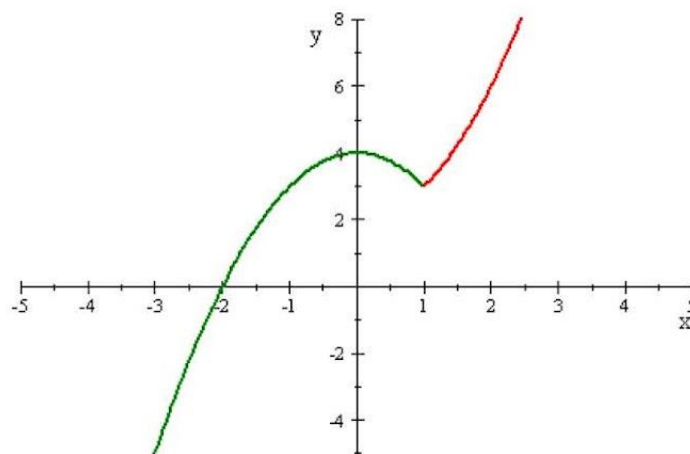
Contoh 4. Suatu fungsi $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{jika } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$

1. Gambarkan sketsanya.

2. Tentukan nilai setiap limit berikut: $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

Penyelesaian:

1. Gambar sketsanya.



2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x^2) = 3$.



$$\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2 + x^2) = 3.$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = ada = 3$.

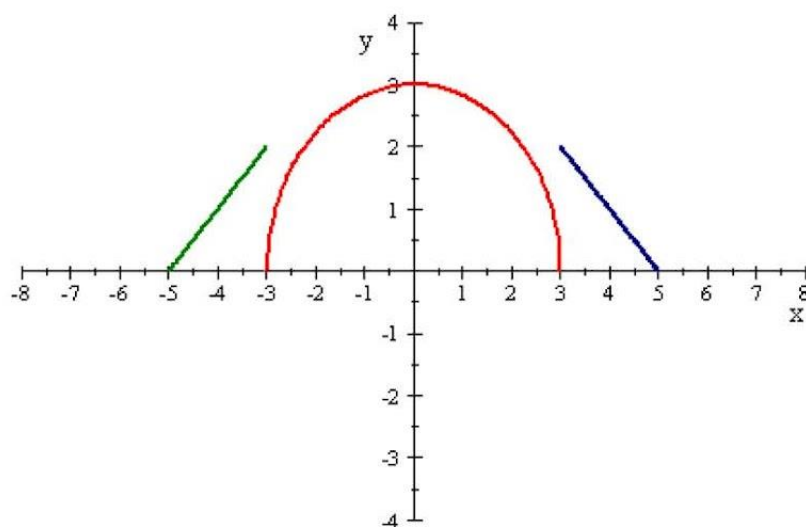
Contoh 5. Suatu fungsi $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{jika } x < -3 \\ \sqrt{9-x^2} & \text{jika } -3 \leq x \leq 3 \\ 5-x & \text{jika } 3 < x \end{cases}$

1. Gambarkan sketsanya.
2. Tentukan nilai setiap limit berikut: $\lim_{x \rightarrow -3-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3+} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x), \lim_{x \rightarrow 3-} f(x), \lim_{x \rightarrow 3+} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

Penyelesaian:

1. Gambar sketsanya.



$$2. \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3-} (x+5) = 2.$$



$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3+} \sqrt{9 - x^2} = 0.$$

Karena $\lim_{x \rightarrow -3-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3+} f(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{tidak ada}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \sqrt{9 - x^2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (5 - x) = 2.$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3+} f(x)$ maka $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \text{tidak ada}$.

LATIHAN

Buatlah grafiknya dan tentukan limit yang ditunjukkan bila ada, bila tidak ada beri alasannya.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{jika } x < 1 \\ -1 & \text{jika } x = 1 \\ -3 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1-} f(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$2. \quad f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{jika } t \leq -4 \\ 4 - t & \text{jika } t > -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4+} f(t), \lim_{x \rightarrow -4-} f(t), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow -4} f(t).$$

$$3. \quad F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{jika } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2-} f(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$



$$4. \quad g(r) = \begin{cases} 2r+3 & \text{jika } r < 1 \\ 2 & \text{jika } r = 1 \\ 7-2r & \text{jika } r > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1+} g(r), \lim_{r \rightarrow 1-} g(r), \text{ dan } \lim_{r \rightarrow 1} g(r).$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{jika } x < 2 \\ 4 & \text{jika } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{jika } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2-} f(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$$6. \quad F(x) = |x - 5|$$

$$\lim_{x \rightarrow 5+} F(x), \lim_{x \rightarrow 5-} F(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 5} F(x).$$

$$7. \quad f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0-} f(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{jika } x < 1 \\ 4 & \text{jika } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1-} f(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{jika } x < -1 \\ x^2 & \text{jika } -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{jika } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1+} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$



$$10. G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1} & \text{jika } t \leq -1 \\ \sqrt{1-t^2} & \text{jika } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t-1} & \text{jika } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} G(t), \lim_{x \rightarrow -1^+} G(t), \lim_{x \rightarrow -1} G(t), \lim_{x \rightarrow 1^-} G(t), \lim_{x \rightarrow 1^+} G(t), \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 1} G(t).$$

D. Teorema limit fungsi

1. Teorema Limit Utama.

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta dan f/g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c , maka:

- $\lim_{x \rightarrow c} k = k$,
- $\lim_{x \rightarrow c} x = c$,
- $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \times \lim_{x \rightarrow c} g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$,
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$,



i. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ bilamana n genap.

Contoh 1. Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4 = 2 \lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 2 \left[\lim_{x \rightarrow 3} x \right]^4 = 2[3]^4 = 162$$

Contoh 2. Carilah $\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x)$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow 4} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 4} 2x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x) = 3 \lim_{x \rightarrow 4} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 4} x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x) = 3 \left[\lim_{x \rightarrow 4} x \right]^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 4} x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x) = 3[4]^2 - 2[4] = 40.$$

Contoh 3. Carilah $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \rightarrow 4} x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 9)}}{4}$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{1}{4} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} 9},$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{1}{4} \sqrt{\left[\lim_{x \rightarrow 4} x\right]^2 + 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{1}{4} \sqrt{4^2 + 9} = \frac{5}{4}$$

Contoh 4. Jika $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$ dan $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 8$. carilah

$$\lim_{x \rightarrow 3} [f^2(x) \times \sqrt[3]{g(x)}].$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3} [f^2(x) \times \sqrt[3]{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow 3} f^2(x) \times \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{g(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} [f^2(x) \times \sqrt[3]{g(x)}] = \left[\lim_{x \rightarrow 3} f(x)\right]^2 \times \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} [f^2(x) \times \sqrt[3]{g(x)}] = [4]^2 \times \sqrt[3]{8} = 32$$

2. Teorema Substitusi.

Fungsi polinom f mempunyai bentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Seperti yang telah dibahas pada bab 1 mengenai bilangan rasional, maka fungsi rasional f adalah

hasil bagi dari dua fungsi polinom yaitu,

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}.$$



Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

asalkan dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di c tidak nol.

Contoh 1. Carilah $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$

Contoh 2. Carilah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{(x-1)^2} = +\infty$$

Contoh 3. Carilah $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t+5)}{(t-2)(t+3)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t+5)}{(t-2)(t+3)}$$



$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t+5)}{(t+3)} = \frac{7}{5}$$

Contoh 4. Carilah $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{-7x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{-\frac{4}{27}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

Contoh 5. Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 7x - 5$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 7x - 5 = 25$$

Contoh 6. Carilah $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt[3]{\frac{8 + 4 + 3}{9}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{3}$$



LATIHAN

Selesaikanlah

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (7x - 4)$.
2. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 + 1)(3x - 1)]$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} [(4x^2 - 3)(7x^3 + 2x)]$.
5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{3x^3 - 16}$.
6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4 - 8}{x^3 + 24}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x - 5}$.
8. $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{5x^2 + 2x}$.
9. $\lim_{t \rightarrow -2} (2t^3 + 15)^{13}$.
10. $\lim_{w \rightarrow -2} \sqrt{-3w^3 + 7w^2}$.
11. $\lim_{y \rightarrow 2} \left(\frac{4y^3 + 8y}{y + 4} \right)^{1/3}$.
12. $\lim_{w \rightarrow 5} (2w^4 - 9w^3 + 19)^{-1/2}$.



$$13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 7}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{14} - 3x^{11} + 2x^3 - 6}{3x^9 + 2x + 1}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x - 4}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 4x - 5}.$$

$$18. \lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^2 - 2u}{u^2 - 4}.$$

$$19. \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + 7t + 7}{t^2 - 4t - 5}.$$

$$20. \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2 - 4}.$$

$$21. \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2 + 2y - 3)}{y^2 - 2y + 1}.$$

$$22. \lim_{w \rightarrow -2} \frac{(w+2)(w^2 - w - 6)}{w^2 + 4w + 4}.$$

Carilah limit untuk soal-soal berikut di bawah ini jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ dan

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$$

$$23. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}.$$



$$24. \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{g(x)}[f(x) + 3].$$

$$26. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 3]^4.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow a} [f(t) + (t - a)g(t)].$$

$$28. \lim_{x \rightarrow a} [f(u) + 3g(u)]^3.$$

Cari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[f(x) - f(2)]}{(x - 2)}$ untuk setiap fungsi pada soal berikut

$$29. f(x) = 5x^2.$$

$$30. f(x) = 3x^2 - 5.$$

$$31. f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$32. f(x) = \frac{3}{x^2}.$$

E. Limit tak berhingga

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan oleh:

$$f(x) = \frac{3}{(x - 2)^2}$$

Kita cek nilai fungsi f bilamana x mendekati 2. Misalkan x mendekati 2 dari kanan, dan perhatikan nilai $f(x)$ yang diberikan pada tabel.



Tabel

x	$f(x)$
3	3
$5/2$	12
$7/3$	27
$9/4$	48
$21/10$	300
$201/100$	30.000
$2001/1000$	3.000.0000

Dari table dapat dilihat secara intuitif bahwa untuk x yang semakin dekat menuju 2 sepanjang nilai x yang lebih besar daripada 2, maka nilai $f(x)$ membesar tanpa batas. Kita dapat membuat $f(x)$ lebih besar daripada suatu bilangan positif yang telah ditentukan sebelumnya untuk nilai x yang cukup dekat ke 2 dan x lebih besar daripada 2.

Untuk menunjukkan $f(x)$ membesar tanpa batas bila x mendekati 2 sepanjang nilai yang lebih besar daripada 2 kita menuliskan

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Sekarang misalkan x mendekati 2 dari kiri dan perhatikan nilai yang diberikan pada tabel.

x	$f(x)$
1	3
$3/2$	12
$5/3$	27
$7/4$	48
$19/10$	300



199/100	30.000
1999/1000	3.000.0000

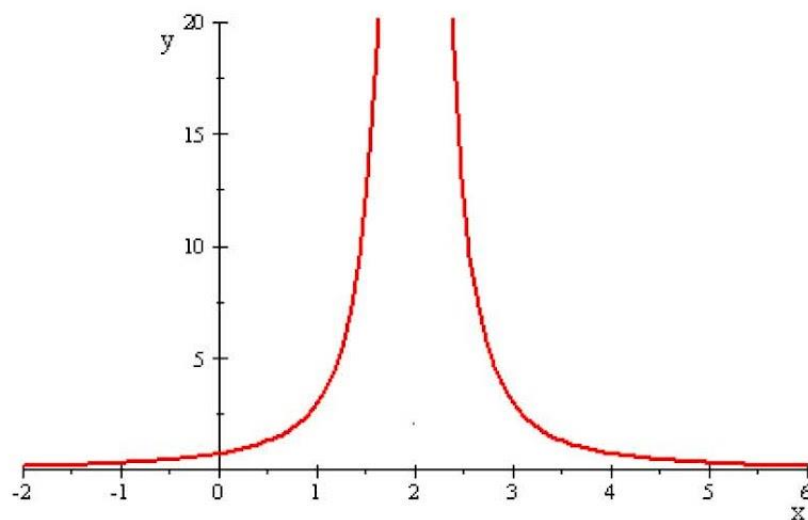
Dilihat secara intuitif dari table bahwa untuk x yang bergerak semakin dekat menuju 2 yang lebih kecil daripada 2, maka $f(x)$ membesar tanpa batas, kita tuliskan:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Karena untuk x mendekati 2 dari kiri dan kanan, $f(x)$ membesar tanpa batas; dituliskan:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Grafiknya



Definisi

“Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi di setiap bilangan pada suatu selang terbuka I yang memuat a , kecuali mungkin pada a sendiri. Untuk x mendekati a , $f(x)$ memperbesar tanpa batas yang ditulis:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Suatu fungsi

$$g(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

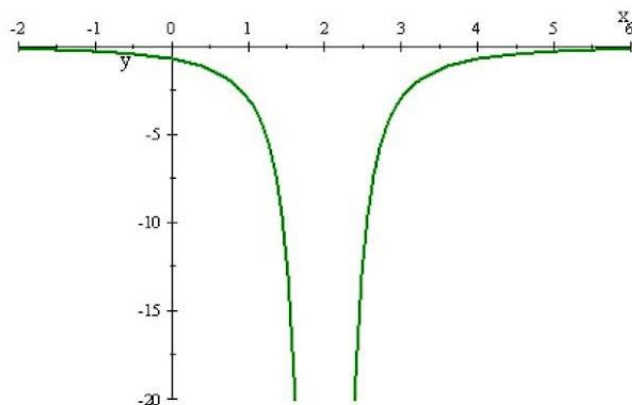
Nilai fungsi yang ditentukan oleh $g(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ adalah negatif dari nilai

fungsi yang ditentukan oleh $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$. Jadi fungsi g bila x mendekati

2 dari kiri atau kanan, $g(x)$ mengecil tanpa batas, dan kita menuliskan

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty.$$

Grafiknya



Definisi

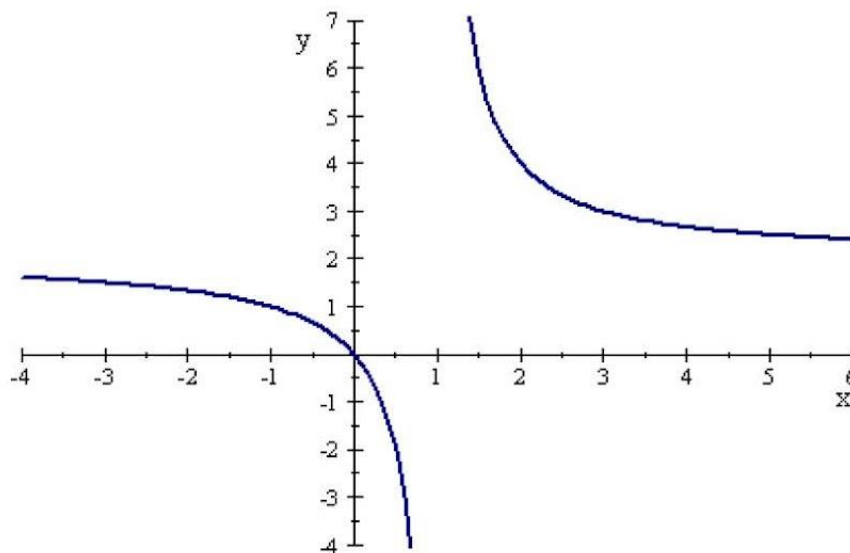
“Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi di setiap bilangan pada suatu selang terbuka I yang memuat a , kecuali mungkin pada a sendiri. Untuk x mendekati a , $f(x)$ mengecil tanpa batas yang ditulis:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Suatu fungsi

$$h(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Sketsa grafik fungsi dapat dilihat pada grafik berikut.



Sehingga:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$$

Teorema 1

Jika r suatu bilangan bulat positif, maka:

1. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^r} = +\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{jika } r \text{ ganjil.} \\ +\infty & \text{jika } r \text{ genap.} \end{cases}$

Teorema 2

Misalkan a suatu bilangan riil, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ dimana c suatu konstanta tak nol.

1. Jika $c > 0$ dan $f(x) \rightarrow 0$ sepanjang nilai positif dari $f(x)$, maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

2. Jika $c > 0$ dan $f(x) \rightarrow 0$ sepanjang nilai negatif dari $f(x)$, maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

3. Jika $c < 0$ dan $f(x) \rightarrow 0$ sepanjang nilai positif dari $f(x)$, maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

4. Jika $c < 0$ dan $f(x) \rightarrow 0$ sepanjang nilai negatif dari $f(x)$, maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$



Contoh 1. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x-1}{x-4} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x-1}{x-4} = -\infty$

Contoh 2. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1-2x}{x-4} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1-2x}{x-4} = +\infty$

Contoh 3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$

Contoh 4. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$;

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x+1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)} = +\infty$$

Contoh 5. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$;

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x+1) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)} = -\infty$$

Contoh 6. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2};$

Penyelesaian:

$$x - 2 = \sqrt{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)} \times \sqrt{(x+2)}}{\sqrt{(x-2)} \times \sqrt{(x-2)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x+2)}}{\sqrt{(x-2)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = +\infty$$

Contoh 7. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2};$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(2-x)} \times \sqrt{(2+x)}}{-\sqrt{(2-x)} \times \sqrt{(2-x)}}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

Teorema 3

1. Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ dimana c suatu konstantan,

maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

2. Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ dimana c suatu konstantan,

maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

Teorema ini berlaku juga jika " $x \rightarrow a$ " diganti $x \rightarrow a+$ dan $x \rightarrow a-$.

Contoh 1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$ maka

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right] = +\infty.$$

Teorema 4

Misalkan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, dimana c suatu konstanta tak nol, maka:

1. Jika $c > 0$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = +\infty$.
2. Jika $c < 0$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = -\infty$.



Teorema ini berlaku juga jika " $x \rightarrow a$ " diganti $x \rightarrow a +$ dan $x \rightarrow a -$.

Contoh 1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(x-3)^2} = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-4} = -7$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{5}{x-3^2} \times \frac{x+4}{x-4} \right] = -\infty.$$

Teorema 5

Misalkan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, dimana c suatu konstanta tak nol, maka:

1. Jika $c > 0$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = -\infty$.
2. Jika $c < 0$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = +\infty$.

Teorema ini berlaku juga jika " $x \rightarrow a$ " diganti $x \rightarrow a +$ dan $x \rightarrow a -$.

Contoh 1. $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$ sehingga

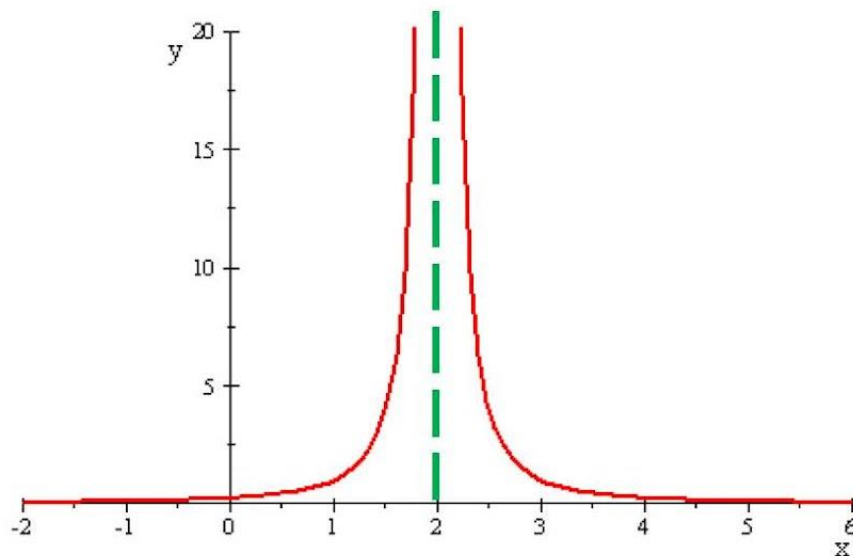
$$\lim_{x \rightarrow 2-} \left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \times \frac{x-3}{x+2} \right] = +\infty.$$

Suatu bantuan-bantuan limit tak berhingga untuk menggambarkan grafik suatu fungsi adalah menentukan **asimtot** grafiknya, bila ada (asimtot tegak). Misalnya suatu fungsi didefinisikan:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$$

Grafiknya





Suatu garis sejajar dan di atas sumbu x akan memotong grafik ini di dua titik, satu titik di sebelah kiri garis $x = a$ dan satu titik di sebelah kanan garis ini. Jika untuk setiap $k > 0$, berapapun besarnya, garis $y = k$ akan memotong grafik fungsi f di dua titik. Jarak kedua titik potong ini dari garis $x = a$ semakin mengecil untuk k yang semakin membesar. Garis $x = a$ dinamakan asimtot tegak dari grafik f .

Definisi

Garis $x = a$ dikatakan suatu asimtot tegak dari grafik fungsi f jika paling sedikit salah satu dari pernyataan berikut ini benar.

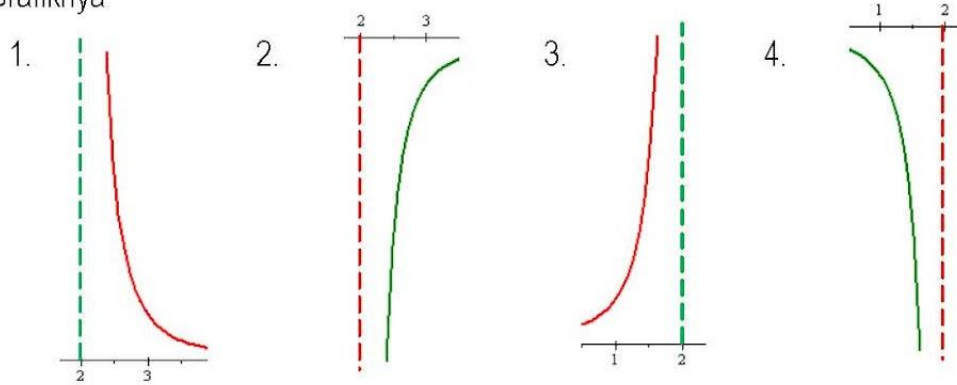
1. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$.



$$3. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

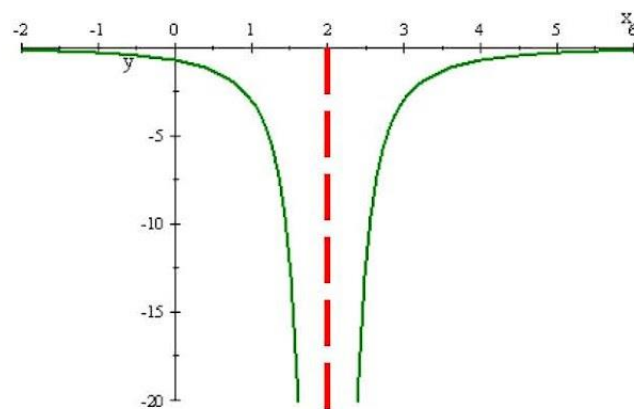
Grafiknya



Suatu fungsi

$$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$$

Maka garis $x = a$ adalah asimtot tegak fungsi g .



Contoh 1. Tentukan asimtot tegak dari grafik fungsi yang didefinisikan oleh persamaan $f(x) = \frac{3}{x-3}$ dan gambarkan grafiknya.

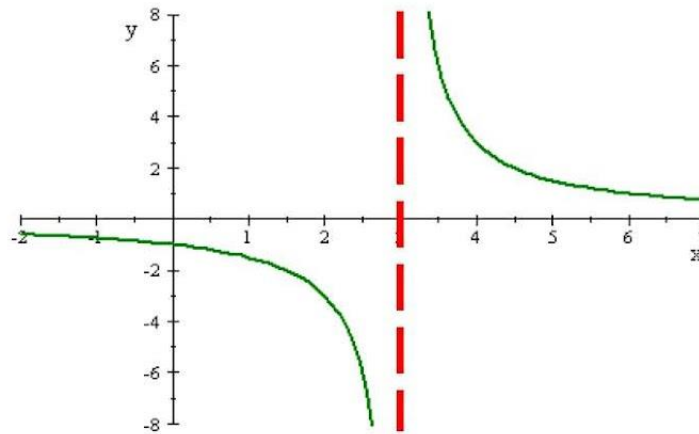
Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty.$$

maka $x = 3$ adalah asimtot tegak dari grafik f .

Grafiknya:



LATIHAN

Hitunglah limit yang diberikan

1. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5}; \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^2}.$



2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{1-x}; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{1-x}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}.$
3. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x+1}; \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x+1}; \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{x+4}.$
4. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{x-4}; \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x}{9-x^2}; \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x^2}{9-x^2}.$
5. $\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{t+2}{t^2-4}; \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{-t+2}{(t-2)^2}; \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{t+2}{t^2-4}.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}.$
7. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}; \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$
8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-3}{x^3+x^2}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}; \lim_{s \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4} \right).$
9. $\lim_{t \rightarrow -4} \left(\frac{2}{t^2+3t-4} - \frac{3}{t+4} \right); \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}.$

Tentukan asimtot tegak dari fungsi berikut dan gambarkan sketsa grafiknya.

10. $f(x) = \frac{2}{x-4}; f(x) = \frac{3}{x+1}; f(x) = \frac{-2}{x+3}$
11. $f(x) = \frac{-4}{x-5}; f(x) = \frac{-2}{(x+3)^2}; f(x) = \frac{4}{(x-5)^2}$
12. $f(x) = \frac{5}{x^2+8x+15}; f(x) = \frac{1}{x^2+5x-6}; f(x) = \frac{2}{4x^2-4x-35}$



F. Kekontinuan fungsi di suatu titik

Definisi

Fungsi f dikatakan kontinu di bilangan a jika dan hanya jika ketiga syarat berikut dipenuhi:

1. $f(a)$ ada,
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada,
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika satu atau lebih dari ketiga syarat ini tidak dipenuhi di a , maka fungsi f dikatakan tak kontinu di a .

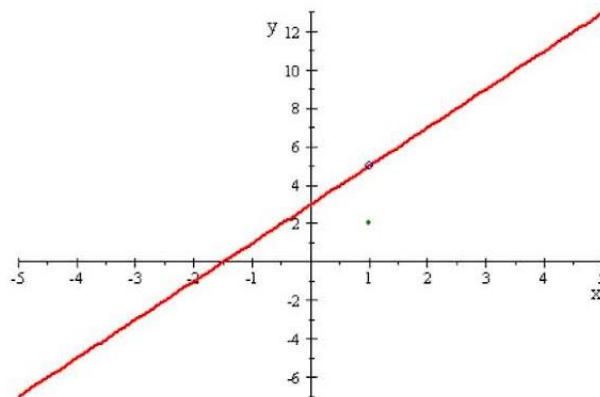
Contoh 1.

Misalkan f didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{jika } x \neq 1 \\ 2 & \text{jika } x = 1 \end{cases}$$

Buatlah sketsanya dan tentukanlah apakah fungsi tersebut di atas kontinu pada $x = 1$.

Penyelesaian:



$f(1) = 2$, sehingga syarat (i) dipenuhi;

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$, sehingga syarat (ii) dipenuhi;

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$, tetapi $f(1) = 2$, sehingga syarat (iii) tidak dipenuhi;

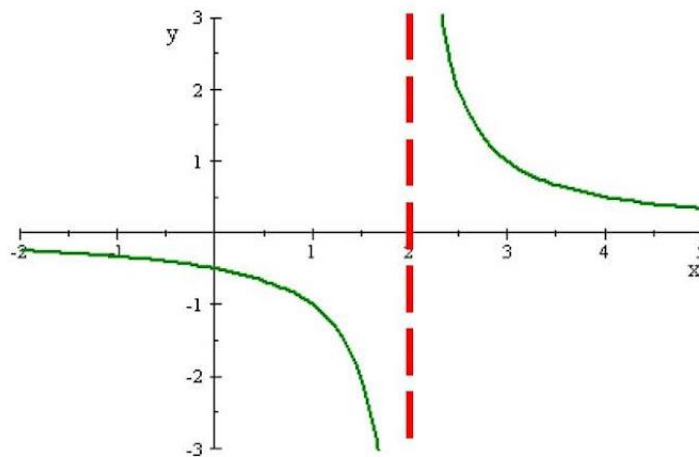
Jadi f tak kontinu di 1.

Contoh 2.

Misalkan f didefinisikan

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Grafik



Dari grafik di atas terlihat bahwa grafik terputus di titik dimana $x = 2$. Karena $f(2)$ tak terdefinisi, maka ada salah satu syarat yang tidak dipenuhi. Karena itu f tak kontinu di 2.

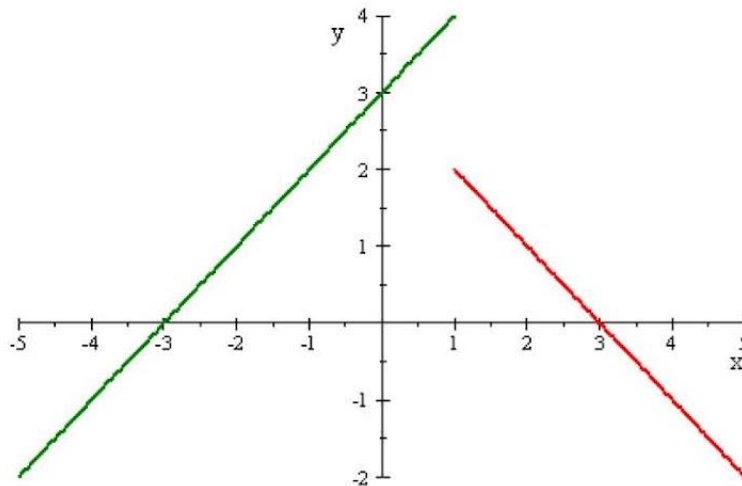
Contoh 3.

Misalkan h didefinisikan



$$h(x) = \begin{cases} 3+x & \text{jika } x \leq 1 \\ 3-x & \text{jika } x > 1 \end{cases}$$

Grafik



Karena grafik ini terputus di titik di mana $x = 1$, maka kita periksa syarat-syaratnya.

1. $h(1) = 4$,
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3+x) = 4$,
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \text{tidak ada}$

Karena syarat kedua tidak terpenuhi maka h tidak kontinu di 1.

Suatu konsep ketak-kontinuan terhapus (removable discontinuity) terjadi karena bila f didefinisikan kembali di a sehingga $f(a)$ sama dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$,

maka fungsi baru tersebut menjadi kontinu di a .

Contoh.



Fungsi yang di definisikan oleh

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

tidak kontinu di 4. Tunjukkan bahwa ketak-kontinuannya terhapus dan didefinisikan kembali $f(4)$ agar ketak-kontinuannya dapat dihapuskan.

Penyelesaian:

Fungsi f tak kontinu di 4 karena $f(4)$ tidak ada. Jika $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = ada$, maka

ketak-kontinuannya dapat dihapuskan dengan mendefinisikan kembali

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{4}$$

Karena itu misalkan $f(4) = \frac{1}{4}$, dan kita mempunyai fungsi baru yang didefinisikan oleh:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{jika } x \neq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{jika } x = 4 \end{cases}$$

Dan fungsi ini kontinu di 4.

Beberapa teorema tentang fungsi kontinu di suatu titik.

Teorema 1

Jika f dan g dua fungsi yang kontinu di bilangan a , maka:

1. $f + g$ kontinu di a ,
2. $f - g$ kontinu di a ,
3. $f \times g$ kontinu di a ,
4. $\frac{f}{g}$ kontinu di a , asalkan $g(a) \neq 0$.

Teorema 2

Suatu fungsi suku banyak kontinu di setiap bilangan.

Teorema 3

Suatu fungsi rasional kontinu di setiap bilangan pada daerah asalnya

Teorema 4

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan $f(x) = \sqrt[n]{x}$, maka

1. Jika n ganjil, maka f kontinu di setiap bilangan,
2. Jika n genap, maka f kontinu di setiap bilangan positif,



LATIHAN

Gambarkan sketsa grafiknya dan periksa dimana terdapat grafik yang terputus, dan tentukan nilai dari peubah bebasnya di mana fungsi tersebut tidak kontinu.

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3},$$

$$2. \quad F(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4},$$

$$3. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{jika } x \neq -3 \\ 1 & \text{jika } x = -3 \end{cases}$$

$$4. \quad G(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & \text{jika } x \neq 4 \\ 2 & \text{jika } x = 4 \end{cases}$$

$$5. \quad h(x) = \frac{5}{x - 4}$$

$$6. \quad H(x) = \frac{1}{x + 2}$$

$$7. \quad G(x) = \begin{cases} \frac{5}{x - 4} & \text{jika } x \neq 4 \\ 2 & \text{jika } x = 4 \end{cases}$$

$$8. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 2} & \text{jika } x \neq -2 \\ 0 & \text{jika } x = -2 \end{cases}$$



$$9. \quad F(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$$

$$10. \quad h(x) = \frac{(x-1)(x^2 - x - 12)}{x^2 - 5x + 4}$$

Buktikan bahwa fungsinya tak kontinu di bilangan a . Kemudian tentukan apakah ketak-kontinuannya terhapus atau esensial. Jika ketak-kontinuannya terhapus, definisikan kembali $f(a)$ agar ketak-kontinuannya dapat dihapuskan.

$$11. \quad f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 2}; a = \frac{2}{3}$$

$$12. \quad f(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+5} & \text{jika } s \neq -5 \\ 0 & \text{jika } s = -5 \end{cases}; a = -5$$

$$13. \quad f(t) = \begin{cases} 9 - t^2 & \text{jika } t \leq 2 \\ 3t + 2 & \text{jika } 2 < t \end{cases}; a = 2$$

$$14. \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}; a = -3$$

$$15. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{s + 5} & \text{jika } x \neq 3 \\ 5 & \text{jika } x = 3 \end{cases}; a = 3$$



G. Kekontinuan fungsi komposisi dan kekontinuan pada suatu selang

Definisi

1. Suatu fungsi dikatakan kontinu pada suatu selang terbuka jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu di setiap bilangan pada selang terbuka.
2. Fungsi f dikatakan kontinu kanan di bilangan a jika dan hanya jika ketiga syarat berikut ini dipenuhi
 - a. $f(a)$ ada,
 - b. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ada,
 - c. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$.
3. Fungsi f dikatakan kontinu kiri di bilangan a jika dan hanya jika ketiga syarat berikut ini dipenuhi
 - a. $f(a)$ ada,
 - b. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ada,
 - c. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$
4. Suatu fungsi yang daerah asalnya memuat selang tertutup $[a, b]$ dikatakan kontinu pada $[a, b]$ jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu pada selang terbuka (a, b) dan juga kontinu kanan di a dan kontinu di b .



5. Suatu fungsi yang daerah asalnya memuat selang separuh terbuka di kanan $[a, b)$ dikatakan kontinu pada $[a, b)$ jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu pada selang terbuka (a, b) dan kontinu kanan di a .
6. Suatu fungsi yang daerah definisinya memuat selang separuh terbuka di kiri $(a, b]$ dikatakan kontinu pada $(a, b]$ jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu pada selang terbuka (a, b) dan kontinu kiri di b .

Teorema 1

Jika $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ dan fungsi f kontinu di b , maka

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

Teorema 2

Jika fungsi g kontinu di a dan fungsi f kontinu di $g(a)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu di a .

Teorema 3

Jika fungsi f kontinu pada suatu selang tertutup $[a, b]$ dan $f(a) \neq f(b)$, maka untuk suatu k di antara $f(a)$ dan $f(b)$ terdapat suatu bilangan c di antara a dan b sehingga $f(c) = k$.

Contoh.

Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = 4 - x^2$. Carilah h yang merupakan hasil komposisi $f \circ g$ dan tentukan daerah asalnya, grafik, serta nilai x dimana h kontinu.

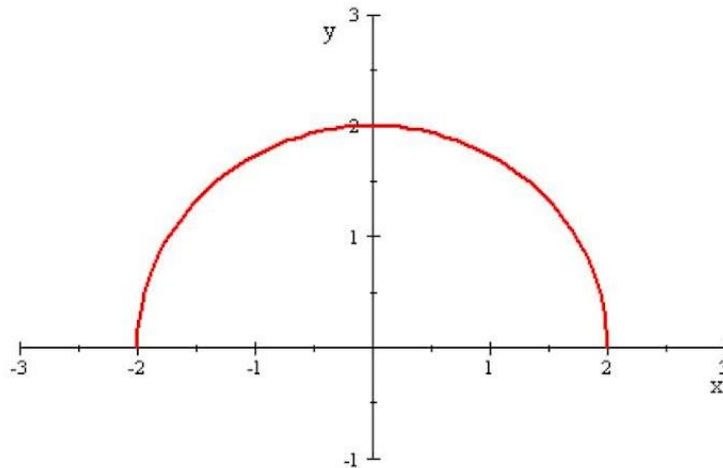
Penyelesaian:



$$h(x) = f(g(x)) = f(4 - x^2) = \sqrt{4 - x^2}$$

Daerah asalnya $\{x | x \in \mathbb{R}; -2 < x < 2\}$

Grafik



Berdasarkan gambar grafik dan daerah asalnya, maka fungsi h kontinu pada selang terbuka $(-2, 2)$.

Contoh.

Buktikan bahwa fungsi h pada contoh di atas kontinu pada selang tertutup $[-2, 2]$.

Penyelesaian:

Berdasarkan teorema yang ada dimana $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b)$, maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



Pernyataan rasional (rational expression) adalah suatu rasio dari polinomial. Merupakan pengembangan aljabar dari rational numbers. Jadi aturan dasar

LATIHAN

Sederhanakanlah

1. $\frac{x^2 - 5x}{5 - x}$

2. $\frac{n + 1}{n^2 + 1}$

H. Kekontinuan fungsi trigonometri dan teorema apit

Dari sub pokok bahasan sebelumnya, bentuk pemfaktoran dari $a^2 + 2ab + b^2$ adalah $(a + b)^2$. Jadi $(a + b)^2$ diekspansi menjadi $a^2 + 2ab + b^2$. Daftar 5

LATIHAN

Ekspansi dan sederhanakanlah

1. $(x + 1)^5$

2. $(x + 1)^7$

