

## BAB 4

# REMAINDER THEOREM

## MATERI YANG DIBAHAS

- A. SYNTHETIC DIVISION
- B. THE REMAINDER THEOREM AND FACTOR THEOREM
- C. THE RATIONAL ROOT THEOREM
- D. DECOMPOSING RATIONAL FUNCTIONS
- E. APPLICATIONS

### A. Synthetic Division

Pada bagian ini kita akan belajar suatu metode untuk mencari titik potong di sumbu  $x$  dari persamaan polynomial atau persamaan rational.

Contoh 1. Berapakah hasil bagi dari  $(x^3 - x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

Penyelesaian

1. Step 1. Bagilah  $x^3$  dengan  $x$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-2 \overline{) x^3 - x^2 - 5x + 6} \end{array}$$



2. Step 2. Kalikan  $x-2$  dengan  $x^2$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-2 \overline{) x^3 - x^2 - 5x + 6} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ x^2 \phantom{+ 6} \end{array}$$

3. Turunkan faktor berikutnya  $-5x$  dan kemudian bagi  $x^2 \div x = x$

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ x-2 \overline{) x^3 - x^2 - 5x + 6} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ x^2 - 5x \phantom{+ 6} \end{array}$$

4. Ulang terus proses tersebut sampai mendapatkan hasil akhir

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ x-2 \overline{) x^3 - x^2 - 5x + 6} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ x^2 - 5x \phantom{+ 6} \\ \underline{x^2 - 2x} \phantom{+ 6} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

Untuk mengecek apakah hasilnya benar maka kalikanlah  $(x^2 + x - 3)$

dengan  $(x - 2)$  dan hasilnya  $(x^3 - x^2 - 5x + 6)$

Contoh 2. Berapakah hasil bagi dari  $(5x + 3x^3 - 8) \div (x + 3)$



Penyelesaian

Pertama tulis persamaan umumnya secara keseluruhan  $(3x^3 + 0x^2 + 5x - 8)$ .

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 9x + 32 \\ x + 3 \overline{) 3x^3 + 0x^2 + 5x - 8} \\ \underline{3x^3 + 9x^2} \phantom{- 8} \\ -9x^2 + 5x \phantom{- 8} \\ \underline{-9x^2 - 27x} \phantom{- 8} \\ 32x - 8 \\ \underline{32x + 96} \\ -104 \end{array}$$

Hasil baginya adalah  $3x^2 - 9x + 32$  dengan menghasilkan sisa  $-104$ .

Pengecekan hasil pembagian adalah :

$$(x + 3)(3x^2 - 9x + 32) + (-104) = 3x^3 + 5x - 8$$

Contoh 3. Berapakah hasil bagi dari  $(x^3 + x^2 - 11x + 12) \div (x - 2)$

Penyelesaian

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 5 \\ x - 2 \overline{) x^3 + x^2 - 11x + 12} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 12} \\ 3x^2 - 11x \phantom{+ 12} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{+ 12} \\ -5x + 12 \\ \underline{-5x + 10} \\ 2 \end{array}$$



Dari penyelesaian di atas telah ditemukan koefisien variabel dan konstantannya.

Sekarang kita hilangkan variabelnya dan koefisiennya tetap kita pakai maka hasil penyelesaiannya :

$$\begin{array}{r}
 1+3-5 \\
 1-2 \overline{)1+1-11+12} \\
 \underline{1-2} \\
 3-11 \\
 \underline{3-6} \\
 -5+12 \\
 \underline{-5+10} \\
 2
 \end{array}$$

Karena terjadi pengulangan beberapa nilai yang ada maka penyelesaian ini dapat dapat dipersingkat lagi dengan menghilangkan beberapa nilai tersebut. Pada pembagiya koefisien dari variabel yang ada adalah 1 sehingga koefisien tersebut juga dapat dihilangkan. Penyelesaiannya menjadi :

$  \begin{array}{r}  1+3-5 \\  -2 \overline{)1+1-11+12} \\  \underline{-2} \\  3-11 \\  \underline{3-6} \\  -5+12 \\  \underline{-5+10} \\  2  \end{array}  $	<p>Nilai -11 dan 12 tidak perlu dibawa ke bawah</p>	$  \begin{array}{r}  1+3-5 \\  -2 \overline{)1+1-11+12} \\  \underline{-2} \\  3 \\  \underline{3-6} \\  -5 \\  \underline{-5+10} \\  2  \end{array}  $
---	---	---



Kemudian semua angka di tarik ke atas

$$\begin{array}{r} 1+3-5 \\ -2 \overline{) 1+1-11+12} \\ \underline{-2-6+10} \\ 3-5+2 \end{array}$$

Kemudian nilai yang paling depan sendiri diturunkan sehingga baris terakhir berisi hasil bagi dan sisa dari pembagian tersebut.

$$\begin{array}{r} -2 \overline{) 1+1-11+12} \\ \underline{-2-6+10} \\ \text{Hasil Bagi} \rightarrow 1 \quad 3-5 \quad \underline{+2} \quad \text{Sisa} \end{array}$$

Kemudian kita ganti pembagiya dengan  $+2$  dan operasi hasilnya dirubah maka hasilnya

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1+1-11+12} \\ \underline{+2+6-10} \\ \text{Hasil Bagi} \rightarrow 1 \quad 3-5 \quad \underline{+2} \quad \text{Sisa} \end{array}$$

Proses pembagian yang panjang dapat disingkat menjadi bentuk yang pendek.

Permasalahan pembagian yang dibuat dalam bentuk singkat dinamakan

***synthetic division***.

Contoh 4. Gunakan metode synthetic division cari hasil bagi dari

$$(2x^3 - 9x^2 + 10x - 7) \div (x - 3)$$



Penyelesaian

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2 - 9 + 10 - 7} \\ \underline{+ 6 - 9 + 3} \\ 2 - 3 + 1 \overline{) - 4} \end{array}$$

Maka hasil baginya  $2x^2 - 3x + 1$  dan sisanya  $-4$

Contoh 5. Gunakan metode synthetic division cari hasil bagi dari

$$\left(-\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^2 - 7x - 4\right) \div (x+3)$$

Penyelesaian

$$\begin{array}{r} -3 \overline{) -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} - 7 - 4} \\ \underline{+ 1 - 3 + \frac{17}{2} - \frac{9}{2}} \\ -\frac{1}{3} + 1 - \frac{17}{6} + \frac{3}{2} \overline{) -\frac{17}{2}} \end{array}$$

Maka hasil baginya  $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{17}{6}x + \frac{3}{2}$  dan sisanya  $-\frac{17}{2}$

Contoh 6. Hitunglah  $(6x^5 - x^4 - 31x^3 - 20x^2 + 24x + 8) \div (2x+3)$

Penyelesaian

$$(6x^5 - x^4 - 31x^3 - 20x^2 + 24x + 8) \div (2(x + \frac{3}{2}))$$

$$\begin{array}{r} -\frac{3}{2} \overline{) 6 \quad -1 \quad -31 \quad -20 \quad 24 \quad 8} \\ \underline{-9 \quad 15 \quad 24 \quad 16 \quad -27} \\ 6 \quad -10 \quad -16 \quad 4 \quad 18 \quad -19 \end{array}$$

Maka hasil baginya  $6x^4 - 10x^3 - 16x^2 + 4x + 18$  dengan sisa  $-19$ .

Kemudian hasil tersebut dibagi 2 sehingga hasil baginya :



$3x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 2x + 9$  sisanya tetap  $-19$

Penulisan untuk pembagian ini dapat juga ditulis

$$\frac{\text{Yang dibagi}}{\text{Pembaginya}} = \text{Hasil bagi} + \frac{\text{sisanya}}{\text{Pembaginya}}$$

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

Maka untuk contoh no 6 dapat dituliskan

$$\frac{P(x)}{x + \frac{3}{2}} = 6x^4 - 10x^3 - 16x^2 + 4x + 18 - \frac{19}{x + \frac{3}{2}}$$

Dibagi 2 maka

$$\frac{P(x)}{2x + 3} = 3x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 2x + 9 - \frac{19}{2x + 3}$$

## LATIHAN

Selesaikanlah

1.  $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x - 3)$
2.  $(x^3 - x^2 - 5x + 2) \div (x + 2)$
3.  $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) \div (x - 1)$
4.  $(x^3 + 5x^2 - 7x + 8) \div (x - 2)$
5.  $(x^3 - 3x^2 + x - 5) \div (x + 3)$





6.  $(x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1) \div (x + 2)$
7.  $(2x^4 - 3x^2 + 4x - 2) \div (x - 1)$
8.  $(3x^4 + x^3 - 2x + 3) \div (x + 1)$
9.  $(x^3 - 27) \div (x - 3)$
10.  $(x^3 + 27) \div (x + 3)$
11.  $(x^4 - 16) \div (x + 2)$
12.  $(x^4 + 16) \div (x - 2)$
13.  $(4x^5 - x^3 + 5x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) \div (x + \frac{1}{2})$
14.  $(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}) \div (x - 1)$
15.  $(2x^3 + 9x^2 - 3x - 1) \div (2x - 1)$
16.  $(5x^3 - 9x^2 + 3x - 11) \div (5x + 4)$
17.  $(x^3 - 4x^2 + 7x - 5) \div (x^2 - 2x - 3)$
18.  $(x^3 - x^2 - x + 10) \div (x^2 - 3x + 5)$
19.  $(3x^5 + 4x^3 - 12x^2) \div (x^2 - x)$
20. Carilah nilai  $k$  jika  $(2x^2 - 5x + 1) \div (x - 2k)$  menghasilkan sisa 4

Penyelesaian :





$$\begin{array}{r}
 2k \overline{) 2 \quad -5 \quad \quad \quad 1} \\
 \underline{4k \quad \quad 8k^2 - 10k} \\
 2 \quad 4k - 5 \quad -16 \quad 8k^2 - 10k + 1
 \end{array}$$

maka

$$8k^2 - 10k + 1 = 4$$

$$8k^2 - 10k - 3 = 0$$

$$(4k+1)(2k-3) = 0$$

Hasilnya  $k = -\frac{1}{4}$  atau  $k = \frac{3}{2}$ .

Maka  $(2x^2 - 5x + 1) \div (x + \frac{1}{2})$  dan  $(2x^2 - 5x + 1) \div (x - 3)$  menghasilkan sisa 4.

21. Carilah nilai  $k$  jika  $(x^3 - 5x^2 - 3x + k) \div (x - 1)$  menghasilkan sisa  $-5$

22. Carilah nilai  $k$  jika  $(2kx^3 + x^2 + 4x + 2) \div (x - \frac{4}{3})$  menghasilkan sisa  $-\frac{26}{3}$

23. Carilah nilai  $k$  jika  $(x^3 + kx + 1)$  dibagi  $(x + 2)$  dan  $(x - 1)$  menghasilkan sisa yang sama

## B. The Remainder Theorem and Factor Theorem

Sebuah persamaan polynomial  $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 7$  dibagi dengan  $x - 3$  menghasilkan hasil bagi  $q(x) = 2x^2 - 3x + 1$  menghasilkan sisa  $-4$ .

Ketika di check maka :

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 7 = (2x^2 - 3x + 1)(x - 3) + (-4)$$



$$p(x) = q(x)(x-3) + r$$

Secara umum  $p(x)$  dibagi  $x-c$  menghasilkan

$$p(x) = q(x)(x-c) + r$$

Karena  $x = c$  maka

$$p(c) = q(c)(c-c) + r$$

$$p(c) = q(c) \times 0 + r$$

$$p(c) = r$$

### **Teorema sisa**

**Jika polynomial  $p(x)$  dibagi dengan  $x-c$ , maka sisanya sama dengan**

$$p(c)$$

Contoh 1. Carilah sisa dari  $3x^3 - 5x^2 + 7x + 5$  yang dibagi dengan  $x-2$

Penyelesaian :

$$p(2) = 3(2)^3 - 5(2)^2 + 7(2) + 5 = 23$$

Contoh 2. Suatu persamaan  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ . Gunakanlah *synthetic division* dan teorema sisa untuk mencari  $f(3)$

Penyelesaian :

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ & & 3 & 3 & 18 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 17 \end{array}$$

Sisanya adalah  $17 = f(3)$



Jika sisanya  $r = 0$  maka persamaan diatas menjadi

$$p(x) = q(x)(x - c)$$

sehingga  $x - c$  merupakan faktor dari  $p(x)$  maka

$$p(x) = q(x)(x - c) + 0$$

### Teorema faktor

**Jika polynomial  $p(x)$  memiliki faktor  $x - c$  jika dan hanya jika  $p(c) = 0$**

Contoh 3. Tunjukkan bahwa  $x - 2$  adalah faktor dari

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$$

Penyelesaian :

$$p(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 7(2) - 10 = 0$$

Contoh 4. Tunjukkan bahwa  $x + 3$  adalah faktor dari  $p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

dan carilah faktor yang lain dari persamaan tersebut

Penyelesaian :

Menggunakan *synthetic division*

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -1 & -8 & +12 \\ & & -3 & +12 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

dengan menggunakan teorema faktor maka  $p(-3) = 0$

Dari penyelesaian di atas hasil baginya  $x^2 - 4x + 4$  maka kita dapatkan

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x^2 - 4x + 4)(x + 3)$$



$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)^2(x + 3)$$

## LATIHAN

Gunakan *synthetic division* dan teorema remainder

1.  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$  carilah  $f(2)$ .
2.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 5$  carilah  $f(-1)$ .
3.  $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 2$  carilah  $f(3)$ .
4.  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x - 1$  carilah  $f(-2)$ .
5.  $f(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 3$  carilah  $f(1)$ .
6.  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 7$  carilah  $f(-3)$ .

Carilah hasil sisanya dengan menggunakan teorema sisa

7.  $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) \div (x - 2)$ .
8.  $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) \div (x + 2)$ .
9.  $(2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) \div (x - 3)$ .
10.  $(3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1) \div (x + 3)$ .
11.  $(4x^5 - x^3 - 3x^2 + 2) \div (x + 1)$ .
12.  $(3x^2 - 2x^4 + x^3 - 7x + 1) \div (x - 1)$ .



Tentukanlah apakah nilai  $x - c$  adalah faktor dari persamaan  $p(x)$  dan carilah faktor – faktor lainnya.

13.  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 ; x + 1$ .

14.  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 ; x - 1$ .

15.  $p(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24 ; x - 2$ .

16.  $p(x) = -x^3 + 11x^2 - 23x - 35 ; x - 7$ .

17.  $p(x) = -x^3 + 7x + 6 ; x + 2$ .

18.  $p(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10 ; x + 5$ .

19.  $p(x) = 6x^3 - 25x^2 - 29x + 20 ; x - 5$ .

20.  $p(x) = 12x^3 - 22x^2 - 100x - 16 ; x + 2$ .

21.  $p(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 ; x + 2$ .

22.  $p(x) = x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 72x - 144 ; x - 4$ .

23.  $p(x) = x^6 + 6x^5 + 8x^4 - 6x^3 - 9x^2 ; x + 3$ .

24.  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x + 5 ; 2x + 1$ .

25.  $p(x) = 21x^3 - \frac{31}{2}x^4 + 34x - 22 ; 3x - 2$ .

26.  $p(x) = 5x^4 + 3x^3 - 31x^2 + 13x - 6 ; x^2 + x - 6$ .

27.  $p(x) = 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x - 5 ; 2x^2 - x - 1$ .

28.  $p(x) = x^n - y^n ; x - a$ .



29. Carilah nilai  $n$  jika  $x^2 + 5x - 2$  dibagi  $x + n$  menghasilkan sisa  $-8$ .
30. Carilah  $d$  jika  $x + 6$  faktor dari  $x^4 + 4x^3 - 21x^2 + dx + 108$ .
31. Carilah  $b$  jika  $x - 2$  faktor dari  $x^3 + bx^2 - 13x + 10$ .
32. Carilah  $a$  jika  $x - 10$  faktor dari  $ax^3 - 25x^2 + 47x + 30$ .

### C. The Rational Root Theorem

Suatu persamaan polynomial  $(3x + 2)(5x - 4)(2x - 3) = 0$ . Untuk mencari akar penyelesaiannya (root) maka setiap faktor itu sama dengan nol. Sehingga hasilnya  $x = -\frac{2}{3}$ ,  $x = \frac{4}{5}$ , dan  $x = \frac{3}{2}$ . Kemudian dari persamaan di atas jika kita kalikan menjadi  $30x^3 - 49x^2 - 10x + 24 = 0$ .

Nilai **24** dihasilkan dari tiga buah konstanta **2**, **-4** dan **-3**. Kemudian koefisien dari pangkat terbesar **30** dihasilkan dari tiga buah konstanta **3**, **5**, dan **2**.

**3**, **5**, dan **2** adalah penyebut dari hasil penyelesaian faktor di atas. Sehingga penyebut dari rational roots adalah semua faktor dari nilai **30** dan pembilang dari semua faktor dari nilai **24**.

#### Rational Root Theorem

Jika persamaan  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  dimana  $(a_n \neq 0)$  memiliki pangkat  $n$  polinomial dengan koefisien bilangan bulat.

Jika  $\frac{p}{q}$  adalah rational root dari  $f(x) = 0$ , dimana  $\frac{p}{q}$  adalah bentuk





yang paling sederhana, maka  $p$  adalah faktor dari  $a_0$  dan  $q$  adalah faktor dari  $a_n$ .

Contoh 1. Carilah *rational roots* dari  $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 0$

Penyelesaian :

Nilai akhir persamaan **10**, Koefisien pertama **4**.

Faktor dari **10** :  $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Faktor dari **4** :  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Kemungkinan *rational roots* yang didapat :  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 2, \pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{4}, \pm 10$

Dengan menggunakan metode synthetic division dicoba satu per satu.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & -16 & 11 & 10 \\ & & +4 & -12 & -1 \\ \hline & 4 & -12 & -1 & +9 \end{array} \quad \text{Karena } f(1) = 9 \neq 0, \text{ maka } 1 \neq \text{root}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 4 & -16 & 11 & 10 \\ & & -4 & +20 & -31 \\ \hline & 4 & -20 & +31 & -21 \end{array} \quad \text{Karena } f(-1) = -21 \neq 0, \text{ maka } -1 \neq \text{root}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & -16 & 11 & 10 \\ & & +2 & -7 & +2 \\ \hline & 4 & -14 & +4 & +12 \end{array} \quad \text{Karena } f\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \neq 0, \text{ maka } \frac{1}{2} \neq \text{root}$$





$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2} \overline{4-16+11+10} \\ -2+9-10 \text{ Karena } f\left(-\frac{1}{2}\right)=0, \text{ maka } -\frac{1}{2} \text{ root} \\ 4-18+20 \overline{+0} \end{array}$$

Sehingga  $f(x) = (x + \frac{1}{2})(4x^2 - 18x + 20)$ . Untuk mencari root yang lain maka  $4x^2 - 18x + 20 = 0$ . Sehingga dihasilkan

$$f(x) = (x + \frac{1}{2})(4x^2 - 18x + 20)$$

$$f(x) = (x + \frac{1}{2})(2)(2x^2 - 9x + 10)$$

$$f(x) = (2)(x + \frac{1}{2})(x - 2)(2x - 5)$$

Sehingga *rational root* nya  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = 2$ , dan  $x = \frac{5}{2}$

Contoh 2. Carilah *rational roots* dari  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Penyelesaian :

Nilai akhir persamaan **6**. Koefisien pertama **1**.

Faktor dari **6** :  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Faktor dari **1** :  $\pm 1$

Kemungkinan *rational roots* yang didapat :  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Dengan menggunakan metode synthetic division dicoba satu per satu.

$$\begin{array}{r} \overline{11-6+11+6} \\ +1+7+18 \text{ Karena } f(1) \neq 0, \text{ maka } 1 \neq \text{root} \\ 1+7+18 \overline{+24} \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 -1 \overline{) 11 - 6 + 11 + 6} \\
 \underline{-1 - 5 - 6} \phantom{+ 0} \\
 1 + 5 + 6 \phantom{+ 0} \underline{+ 0}
 \end{array}$$

Karena  $f(-1) = 0$ , maka  $-1$  root

Sehingga  $f(x) = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$ . Untuk mencari root yang lain maka  $x^2 + 5x + 6 = 0$ . Sehingga dihasilkan

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Sehingga *rational root* nya  $x = -1$ ,  $x = -2$ , dan  $x = -3$

Contoh 3. Selesaikanlah  $p(x) = 2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$

Penyelesaian :

Rational root yang mungkin :  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4, \text{ dan } \pm 8$

Kemudian kita coba  $\frac{1}{2}$  maka

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2} \overline{) 2 + 7 + 0 - 18 - 8 + 8} \\
 \underline{+ 1 + 4 + 2 - 8 - 8} \\
 2 + 8 + 4 - 16 - 16 \phantom{+ 0} \underline{+ 0}
 \end{array}$$

Maka  $x - \frac{1}{2}$  adalah faktor dari  $p(x)$

$$p(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 16x - 16)$$

$$p(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8)$$

Untuk mencari root yang lain maka  $p(x) = 0$



Rational root yang mungkin :  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \text{ dan } \pm 8$

Kemudian kita coba  $-2$  maka

$$\begin{array}{r} -2 \overline{1+4+2-8-8} \\ \quad -2-4+4+8 \\ \hline 1+2-2-4 \quad +0 \end{array}$$

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = (x+2)(x^3 + 2x^2 - 2x - 4)$$

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = (x+2)[x^2(x+2) - 2(x+2)]$$

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = (x+2)(x^2 - 2)(x+2)$$

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = (x+2)^2(x^2 - 2)$$

Sehingga

$$p(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8)$$

$$p(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x+2)^2(x^2 - 2)$$

$$p(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x+2)^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

Sehingga hasilnya adalah

$$x = \frac{1}{2}, x = -2, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$$

## LATIHAN

Carilah  $x$



1.  $x^3 + 2x^2 - 29x + 42 = 0$ .
2.  $x^3 + x^2 - 21x - 45 = 0$ .
3.  $2x^3 - 15x^2 + 24x + 16 = 0$ .
4.  $3x^3 + 2x^2 - 75x - 50 = 0$ .
5.  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ .
6.  $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x = 0$ .
7.  $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 12x - 18 = 0$ .
8.  $x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 18x - 15 = 0$ .
9.  $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$ .
10.  $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 17x - 18 = 0$ .
11.  $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 15x - 18 = 0$ .
12.  $x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 18x = 0$ .
13.  $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 36x - 18 = 0$ .
14.  $2x^3 - 5x - 3 = 0$ .
15.  $6x^3 - 25x^2 + 21x + 10 = 0$ .
16.  $3x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ .

Carilah

17.  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ .
18.  $-x^3 - 3x^2 + 24x + 80$ .
19.  $x^3 - 28x - 48$ .
20.  $6x^4 + 9x^3 + 9x - 6$ .

Carilah penyelesaiannya



$$21. \quad y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

$$y = 7x - 13.$$

$$22. \quad y = -x^3.$$

$$y = -3x^2 + 4.$$

$$23. \quad y = 4x^3 - 7x^2 + 10.$$

$$y = x^3 + 43x - 5.$$

$$24. \quad y = x^2 + 4x.$$

$$(x-1)^2 + (y-6)^2 = 37$$

## D. Decomposing Rational Functions

### Definisi

Merupakan kombinasi dari komponen yang sederhana atau memecahkan bilangan yang kompleks menjadi bilangan yang sederhana.

Contoh 1.  $\frac{6}{x-4} + \frac{3}{x-2}$  menjadi  $\frac{9x-24}{(x-4)(x-2)}$ .

Contoh 2.  $\frac{9x-24}{(x-4)(x-2)}$  menjadi  $\frac{6}{x-4} + \frac{3}{x-2}$ .

Penyelesaian :

$$\frac{9x-24}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2}$$

$$(x-4)(x-2) \frac{9x-24}{(x-4)(x-2)} = (x-4)(x-2) \left[ \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} \right]$$



$$9x - 24 = A(x - 2) + B(x - 4)$$

$$B(x - 4) = 0 \text{ maka } x = 4$$

$$9(4) - 24 = A(4 - 2) + B(4 - 4)$$

$$12 = 2A + 0$$

$$A = 6$$

$$A(x - 2) = 0 \text{ maka } x = 2$$

$$9(2) - 24 = A(2 - 2) + B(2 - 4)$$

$$-6 = 0 - 2B$$

$$B = 3$$

Contoh 3. Pecahkanlah  $\frac{6x^2 + x - 37}{(x - 3)(x + 2)(x - 1)}$  menjadi komponen yang sederhana.

*Penyelesaian :*

$$\frac{6x^2 + x - 37}{(x - 3)(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1}$$

dikalikan dengan  $(x - 3)(x + 2)(x - 1)$  menjadi

$$6x^2 + x - 37 = A(x + 2)(x - 1) + B(x - 3)(x - 1) + C(x - 3)(x + 2)$$

Mencari  $A$  maka  $x = 3$  sehingga

$$54 + 3 - 37 = 10A + 0 + 0$$

$$20 = 10A$$



$$A = 2$$

Mencari  $B$  maka  $x = -2$  sehingga

$$24 - 3 - 37 = 0 + B(-5)(-3) + 0$$

$$-15 = 15A$$

$$B = -1$$

Mencari  $C$  maka  $x = 1$  sehingga

$$6 + 1 - 37 = 0 + 0 + -6C$$

$$-30 = -6C$$

$$C = 5$$

Sehingga

$$\frac{6x^2 + x - 37}{(x-3)(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-1}$$

Jika suatu polynomial  $\frac{1}{(a+b)^n}$  maka di pecah menjadi

$$\frac{A}{a+b} + \frac{B}{(a+b)^2} + \frac{C}{(a+b)^3} + \dots + \frac{D}{(a+b)^{n-1}} + \frac{E}{(a+b)^n}. \quad \text{Hal ini}$$

berbeda dengan contoh yang di atas. Pada soal ini terdapat persamaan kuadrat atau lebih yang jika di decomposing, persamaan kuadrat tersebut tetap diikutsertakan dengan cara di pecah seperti tersebut di atas.

Contoh 4. Jika  $\frac{7}{x+3} - \frac{4}{(x+3)^2}$  digabungkan menjadi  $\frac{7x+17}{(x+3)^2}$ . Bagaimana

jika di decomposing.





*Penyelesaian :*

$$\frac{7x+17}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$7x+17 = A(x+3) + B$$

Mencari  $B$  maka  $x = -3$  sehingga

$$7(-3)+17 = A(0) + B$$

$$B = -4$$

Nilai  $B$  dimasukkan

$$7x+17 = A(x+3) - 4$$

Mencari  $A$  ambillah  $x = 0$  sehingga

$$7(0)+17 = A(0+3) - 4$$

$$17 = 3A - 4$$

$$A = 7$$

Maka hasil akhirnya

$$\frac{7x+17}{(x+3)^2} = \frac{7}{x+3} + \frac{-4}{(x+3)^2} = \frac{7}{x+3} - \frac{4}{(x+3)^2}$$

Contoh 5. Pecahkanlah  $\frac{6+26x-x^2}{(2x-1)(x+2)^2}$  menjadi komponen yang sederhana.

*Penyelesaian :*

$$\frac{6+26x-x^2}{(2x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$



$$6 + 26x - x^2 = A(x+2)^2 + B(2x-1)(x+2) + C(2x-1)$$

Mencari  $A$  maka  $x = \frac{1}{2}$  sehingga

$$6 + 13 - \frac{1}{4} = A\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0 + 0$$

$$\frac{75}{4} = \frac{25}{4}A$$

$$A = 3$$

Mencari  $C$  maka  $x = -2$  sehingga

$$6 - 52 - 4 = 0 + 0 + C(-5)$$

$$-50 = -5C$$

$$C = 10$$

Substitusikan  $A = 3$  dan  $C = 10$  ke persamaan sehingga

$$6 + 26 - 1 = 3(9) + B(1)(3) + 10(1)$$

$$-6 = 3B$$

$$B = -2$$

Maka hasilnya

$$\frac{6 + 26x - x^2}{(2x-1)(x+2)^2} = \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x+2} + \frac{10}{(x+2)^2}$$

Menggunakan cara yang lain

$$6 + 26x - x^2 = A(x+2)^2 + B(2x-1)(x+2) + C(2x-1)$$

$$-x^2 + 26x + 6 = Ax^2 + 4Ax + 4A + 2Bx^2 + 3Bx - 2B + 2Cx - C$$

$$-x^2 + 26x + 6 = (A + 2B)x^2 + (4A + 3B + 2C)x + (4A - 2B - C)$$



Dengan menggunakan variabel yang sama maka koefisiennya adalah sebagai berikut :

$$\text{Koefisien dari } x^2 = -1 = A + 2B$$

$$\text{Koefisien dari } x = 26 = 4A + 3B + 2C$$

$$\text{Konstanta} = 6 = 4A - 2B - C$$

Dengan menggunakan linear system maka di dapat penyelesaian  $A = 3$ ,  $B = -2$ , dan  $C = 10$ .

Jika pembilang memiliki persamaan polynomial yang pangkatnya lebih tinggi dari penyebutnya, untuk mendecomposingnya dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 6. Decomposing  $\frac{2x^3 + 3x^2 - x + 16}{x^2 + 2x - 3}$ .

*Penyelesaian :*

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2+2x-3 \overline{) 2x^3+3x^2-x+16} \\ \underline{2x^3+4x^2-6x} \phantom{+16} \\ -x^2+5x \phantom{+16} \\ \underline{-x^2-2x+3} \phantom{+16} \\ 7x+13 \end{array}$$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - x + 16}{x^2 + 2x - 3} = 2x - 1 + \frac{7x + 13}{x^2 + 2x - 3}$$



Decomposing  $\frac{7x+13}{x^2+2x-3}$

$$\frac{7x+13}{x^2+2x-3} = \frac{7x+13}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$7x+13 = A(x+3) + B(x-1)$$

$$7x+13 = (A+B)x + (3A-B)$$

Dengan system linear

$$A+B=7$$

$$\underline{3A-B=13} +$$

$$4A = 20$$

$$A = 5$$

Masukkan nilai  $A$  ke dalam  $A+B=7$ , maka

$$5+B=7$$

$$B=7-5=2$$

Maka hasil decomposingnya:

$$\frac{2x^3+3x^2-x+16}{x^2+2x-3} = 2x-1 + \frac{5}{x-1} + \frac{2}{x+3}$$

## LATIHAN

Pecahlah menjadi komponen yang sederhana



1.  $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$
2.  $\frac{x}{x^2-4}$
3.  $\frac{x+7}{x^2-x-6}$
4.  $\frac{4x^2+16x+4}{(x+3)(x^2-1)}$
5.  $\frac{5x^2+9x-56}{(x-4)(x-2)(x+1)}$
6.  $\frac{x}{(x-3)^2}$
7.  $\frac{3x-3}{(x-2)^2}$
8.  $\frac{2-3x}{x^2+x}$
9.  $\frac{3x-30}{15x^2-14x-8}$
10.  $\frac{2x+1}{(2x+3)^2}$
11.  $\frac{x^2-x-4}{(x-2)^3}$
12.  $\frac{x^2+5x+8}{(x-3)(x+1)^2}$

Perama – tama bagilah dan kemudian dipecah menjadi komponen yang



sederhana

$$13. \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 1}.$$

$$14. \frac{4x^2 - 14x + 2}{4x^2 - 1}.$$

$$15. \frac{12x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 2x - 3}{4x^2 - 4x + 1}.$$

Pecahlah menjadi komponen yang sederhana

$$16. \frac{10x^2 - 16}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

$$17. \frac{10x^3 - 15x^2 - 35x}{x^2 - x - 6}.$$

$$18. \frac{25x^3 + 10x^2 + 31x + 5}{25x^2 + 10x + 1}.$$

$$19. \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 4}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

## E. Applications

Beberapa applications meminta mencari nilai 0 (nol) dalam suatu persamaan polynomial. Dalam kesempatan ini akan ditunjukkan beberapa contoh applications pada type tersebut.

Contoh 1. Carilah tiga bilangan bulat berurutan yang jika di jumlahkan secara pecahan (berbanding terbalik) hasilnya  $37/60$ .

Penyelesaian :



Misalkan  $x$  adalah nilai yang terkecil dari ketiganya. Dua lainnya adalah  $x+1$  dan  $x+2$ . Maka jika dibentuk suatu persamaan menjadi:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{37}{60}$$

Penyelesaian selanjutnya adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{37}{60}$$

$$\frac{(x+1)(x+2) + (x)(x+2) + (x)(x+1)}{(x)(x+1)(x+2)} = \frac{37}{60}$$

$$60[(x+1)(x+2) + (x)(x+2) + (x)(x+1)] = 37[(x)(x+1)(x+2)]$$

Setiap sisi di selesaikan dan kemudian digabungkan.

$$60[x^2 + 3x + 2 + x^2 + 2x + x^2 + x] = 37[x^3 + 3x^2 + 2x]$$

$$60[3x^2 + 6x + 2] = 37[x^3 + 3x^2 + 2x]$$

$$180x^2 + 360x + 120 = 37x^3 + 111x^2 + 74x$$

$$37x^3 - 69x^2 - 286x - 120 = 0$$

Maka persamaan polynomialnya  $f(x) = 37x^3 - 69x^2 - 286x - 120$ . Kita tahu  $x$  adalah bilangan bulat, dengan menggunakan rational roots maka di dapat salah satu nilai  $x$  adalah 4. Dengan menggunakan synthetic division didapat:

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 37 & -69 & -286 & -120 \\ & & 148 & 316 & 120 \\ \hline & 37 & 79 & 30 & 0 \end{array}$$





Hasil baginya  $37x^2 + 79x + 30$  dan jika di cari nilai  $x$  di dapat

$$x = \frac{-79 \pm \sqrt{1801}}{74}.$$

Karena permintaannya bilangan bulat maka besarnya nilai

$x = 4$ . Sehingga hasil penyelesaiaannya adalah 4, 5 dan 6.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$$

Contoh 2. Tinggi dari sebuah kotak kayu adalah 1 cm lebih kecil dari lebarnya dan panjangnya adalah 1 cm lebih besar dari 2 kali lebarnya. Carilah dimensi dari kotak tersebut jika volumenya  $3 \text{ cm}^3$ .

Penyelesaiannya:

Misalkan lebar kotak kita kasih notasi  $x$  dengan satuan cm. Dari keterangan tersebut ditunjukkan untuk tinggi adalah  $x - 1$  dan untuk panjangnya adalah  $2x + 1$ . Sehingga persamaannya untuk menghitung volumenya adalah:

$$(2x + 1)(x)(x - 1) = 3$$

$$2x^3 - x^2 - x = 3$$

$$2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$$

Maka persamaan polynomialnya  $f(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$ . Dengan menggunakan rational roots maka di dapat salah satu nilai  $x$  adalah  $\frac{3}{2}$ .

Dengan menggunakan sythetic division didapat:

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 2 & -1 & -1 & -3 \\ & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$



Hasil baginya adalah  $2x^2 + 2x + 2$ . Karena hasil baginya tidak ada penyelesaiannya maka lebar dari kotak kayu tersebut adalah  $\frac{3}{2}$  cm. Sehingga tingginya adalah  $\frac{1}{2}$  cm. Dan panjangnya adalah 4 cm.

## LATIHAN

1. Sebuah kotak persegi panjang dengan masing-masing ukurannya 3, 4 dan 5 inchi. Setiap ukuran ditambah ukurannya dengan jumlah yang sama besarnya, sehingga volumenya bertambah 3,5 lebih besar dari volume yang sebelumnya. Hitunglah berapa besar penambahan yang terjadi.
2. Suatu segitiga siku-siku memiliki luas  $60 \text{ cm}^2$ . Memiliki panjang alas 7 cm lebih panjang dari tingginya. Carilah ukuran dari segitiga tersebut.
3. Panjang suatu persegi panjang  $\frac{3}{4}$  lebih panjang lebarnya. Jika panjangnya berkurang 1 cm dan luas dari segitiganya adalah  $3 \text{ cm}^2$ , carilah ukuran dari persegi panjang tersebut.

