

Índice general

1. Introducción teórica	2
1.1. Los terremotos	2
1.2. La fuerza de restitución	3
1.3. Leyes de Newton	3
1.4. Los autovalores	4
1.5. Aproximación de autovalores	4
1.5.1. Algoritmo QR	5
2. Desarrollo	8
2.1. Heurística 1: Método de la mitad superior	8
2.1.1. Complejidad del Método de la mitad superior	9
2.2. Heurística 2: Método de intercambio bidireccional	10
2.2.1. Vector de movimientos	11
2.2.2. Complejidad del método de intercambio bidireccional	11
2.3. Heurística 3: Método de Reducción planificada dependiente (búsqueda local)	11
2.3.1. Complejidad del método de reducción planificada	12
3. Resultados	14
3.0.2. Método de Reducción planificada dependiente (con método de in- tercambio bidireccional como solución base)	14
3.0.3. Método de intercambio bidireccional	15
3.0.4. Método de la mitad superior	17
4. Discusión	19
5. Conclusión	20
6. Apéndice A	21
7. Bibliografía	24

En el presente trabajo práctico, propondremos diferentes variantes para resolver el problema de evitar que se colapse un edificio ubicado en una zona sísmica, reacomodando su contenido entre diferentes pisos. Presentaremos los modelos matriciales que emplean el uso de cálculo de autovalores y explicaremos diferentes métodos algorítmicos heurísticos para minimizar la mayor cantidad de casos en los que se generen el colapso del edificio.

Capítulo 1

Introducción teórica

En este trabajo tenemos el desafío de mantener un edificio en pie luego de que un terremoto de una frecuencia de 3 Hz ocurra en la zona de dicha estructura. Para ello idearemos métodos que intercambiarán de pisos los lavarropas (todos iguales en peso) de manera que podamos estipular si nuestro edificio caerá o no luego del siniestro. Entre otras cosas se procesarán matrices con datos para recalcular las nuevas masas de cada piso (ya que se le agregan o quitan lavarropas) y así ir verificando cuán resistente es nuestro depósito ante un terremoto inminente. A continuación se darán algunas definiciones teóricas que nos ayudarán a seguir mejor la lectura de los contenidos del informe.

1.1. Los terremotos

Un terremoto es el movimiento brusco de la Tierra (con mayúsculas, ya que nos referimos al planeta), causado por la brusca liberación de energía acumulada durante un largo tiempo. En general se asocia el término terremoto con los movimientos sísmicos de dimensión considerable, aunque rigurosamente su etimología significa «movimiento de la Tierra».

La corteza de la Tierra está conformada por una docena de placas de aproximadamente 70 km de grosor, cada una con diferentes características físicas y químicas. Estas placas («tectónicas») se están acomodando en un proceso que lleva millones de años y han ido dando la forma que hoy conocemos a la superficie de nuestro planeta, originando los continentes y los relieves geográficos en un proceso que está lejos de completarse.

Habitualmente estos movimientos son lentos e imperceptibles, pero en algunos casos estas placas chocan entre sí como gigantescos témpanos de tierra sobre un océano de magma presente en las profundidades de la Tierra, impidiendo su desplazamiento. Entonces una placa comienza a desplazarse sobre o bajo la otra originando lentos cambios en la topografía. Pero si el desplazamiento es dificultado, comienza a acumularse una energía de tensión que en algún momento se liberará y una de las placas se moverá bruscamente contra la otra rompiéndola y liberándose entonces una cantidad variable de energía que origina el terremoto.

Las zonas en que las placas ejercen esta fuerza entre ellas se denominan fallas y son, desde luego, los puntos en que con más probabilidad se originan fenómenos sísmicos. Sólo el 10 % de los terremotos ocurren alejados de los límites de éstas placas.

El movimiento sísmico se propaga mediante ondas elásticas (similares al sonido), a partir del hipocentro. Las ondas sísmicas se presentan en tres tipos principales:

- **Ondas longitudinales:** tipo de ondas de cuerpo que se propagan a una velocidad de entre 8 y 13 km/s y en el mismo sentido que la vibración de las partículas. Circulan por el interior de la Tierra, atravesando tanto líquidos como sólidos. Son

las primeras que registran los aparatos de medida o sismógrafos, por eso también se las llaman Ondas primarias.

- **Ondas transversales:** son ondas de cuerpo más lentas que las anteriores (entre 4 y 8 km/s) y se propagan perpendicularmente en el sentido de vibración de las partículas. Atraviesan únicamente los sólidos y se registran en segundo lugar en los aparatos de medida (por eso también se las llama Ondas secundarias).
- **Ondas superficiales:** son las más lentas de todas (3,5 km/s) y son producto de la interacción entre las ondas primarias y secundarias a lo largo de la superficie de la Tierra. Son las que producen más daños.

Por último, las mediciones del comportamiento de este fenómeno geológico se realiza a través de un instrumento llamado sismógrafo, el que registra en un papel la vibración de la Tierra producida por el sismo (sismograma). Nos informa la magnitud y la duración.

Este instrumento registra dos tipos de ondas: las superficiales, que viajan a través de la superficie terrestre y que producen la mayor vibración de ésta (y probablemente el mayor daño) y las centrales o corporales, que viajan a través de la Tierra desde su profundidad.

En el presente trabajo vamos a tratar de evitar la caída de un edificio-almacén de una importante cadena de electrodomésticos calculando la resistencia sísmica de dicho edificio y reubicando las heladeras que este contiene para evitar lo que sería una catástrofe, sobre todo por la pérdida de los bienes materiales.

1.2. La fuerza de restitución

Para modelar cómo es el comportamiento de nuestro depósito, nos encontramos con que cada unión entre pisos posee una fuerza de restitución:

$$F_i = k_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde x_i representa el desplazamiento del i -ésimo piso en cada instante. Pero qué es exactamente la fuerza de restitución? Esta fuerza se manifiesta porque los pisos están unidos por medio de un conector elástico cuya acción se parece a un resorte. Entonces como es similar a un resorte podemos utilizar la Ley de Hooke que nos dice que:

$$F_i = -k_i \Delta x$$

donde k_i es constante elástica. De esta manera tenemos casi modelado el comportamiento de los pisos.

1.3. Leyes de Newton

Tamén utilizamos las leyes de Newton para refinar el modelo del sistema. En particular utilizamos la segunda ley (Ley de Fuerza) que dice: «*El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime*» o matemáticamente:

$$F = m \vec{a}$$

tomando como condiciones la constancia de la masa y pequeñas velocidades (que no sobrepasen la velocidad de la luz). El hecho de que no deba superar la velocidad de la luz estriba en que cuanto más cerca esté un cuerpo de alcanzarla (lo que ocurriría en

los sistemas de referencia no-inerciales), más posibilidades hay de que incidan sobre éste una serie de fenómenos denominados efectos relativistas o fuerzas ficticias. Esto ocasiona que se añadan más términos capaces de explicar el movimiento de un sistema cerrado de partículas clásicas que interactúan entre sí. La importancia de esa ecuación radica sobre todo en que resuelve el problema de la dinámica de determinar el tipo de fuerza que se necesita para producir los diferentes tipos de movimientos: el movimiento rectilíneo uniforme o MRU, el movimiento circular uniforme o MCU y el movimiento rectilíneo uniformemente variado o MRUV.

La primera ley nos dice: «*Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado*». Es decir la ley sostiene que todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de MRU a menos que una fuerza lo obligue a cambiar dicho estado. Es decir, la materia es inerte, por lo tanto no puede modificar su estado por si misma.

Y finalmente tenemos la tercera ley: «*Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas*». Esta ley expone que por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, éste realiza una fuerza de igual intensidad y dirección pero de sentido contrario sobre el cuerpo que la produjo. Dicho de otra forma, las fuerzas siempre se presentan en pares de igual magnitud, sentido opuesto y están situadas sobre la misma recta.

1.4. Los autovalores

Como se verá en el siguiente capítulo, para este problema se utiliza el cálculo de autovalores o valores característicos. Daremos un breve repaso de lo que son. Los autovalores se obtienen como raíces del polinomio característico de una matriz A . Este polinomio $P(\lambda)$ tiene la forma:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

y los autovalores, como mencionamos anteriormente, son los ceros del mismo. A veces calcular el determinante de una matriz A puede resultar tedioso y difícil, y como si eso fuera poco, también resulta complicado encontrar buenas aproximaciones de las raíces de $P(\lambda)$.

1.5. Aproximación de autovalores

Para el hallazgo de autovalores se utilizan métodos iterativos de diversos tipos y estabilidad. Uno de ellos es el **método de la potencia** que consiste en calcular sucesivas aproximaciones de los autovalores y autovectores de una matriz A . Este método nos devuelve el máximo autovalor en módulo, y gracias a él, también tenemos el autovector dominante (aquel que proviene del autovalor dominante). El método converge muy lentamente y sólo determina uno de los autovectores, suele usarse con matrices grandes y, por ejemplo, Google lo utiliza para el cálculo del PageRank de los documentos en su motor de búsqueda.

Hay otra versión de este método, denominado **método de la potencia inversa**, que utiliza la inversa de los autovalores de A (que son los autovalores de A^{-1}). En este caso obtendremos el autovalor de menor tamaño de A (porque encontramos el de mayor valor en A^{-1}). Es más exacto que calcular la inversa de A y luego aplicar el método de la potencia simple, por el arrastre de error que uno padece

Por último mencionaremos 2 métodos, uno es el **método de Householder** y el otro es el **algoritmo QR**. El método de Householder no calcula los autovalores de una matriz

A pero sí encuentra una matriz simétrica tridiagonal B que es semejante a A , es decir, que $B = Q^{-1}AQ$ con Q ortogonal. Una vez ejecutado este método podemos recurrir a métodos más eficientes como el algoritmo QR para calcular los autovalores de A . A continuación daremos una cuidadosa explicación del algoritmo QR ya que es el que utilizaremos en nuestro programa.

1.5.1. Algoritmo QR

Antes de comenzar aclaramos que no necesitamos aplicar Householder a nuestra matriz debido a que la matriz A (ver enunciado) es tridiagonal entonces y es semejante con ella misma ya que $A = I^{-1}AI$. Otra cosa que podemos decir es que los otros métodos mencionados anteriormente no son adecuados para calcular todos los autovalores de una matriz, debido al arrastre de error de redondeo. Entonces aclarado esto veamos como QR nos ayuda a calcular simultáneamente todos los autovalores de esta matriz simétrica.

Sea la matriz A y sus elementos tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Supongamos que ninguna b_j es cero (si es cero trabajamos con la submatriz principal hasta b_{j-1} por un lado y con la submatriz a partir de a_j por el otro, evitando la aparición de b_j) entonces el método QR forma una sucesión de matrices $A = A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)} \dots$ tales que:

1. $A^{(1)} = A$ se factoriza como un producto $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$ donde $Q^{(1)}$ es ortogonal y $R^{(1)}$ es triangular superior.
2. $A^{(2)}$ se define como $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$

En general, $A^{(i)}$ se factoriza como un producto $A^{(i)} = Q^{(i)}R^{(i)}$ de una matriz ortogonal $Q^{(i)}$ y de una triangular superior $R^{(i)}$. Luego se define en la dirección inversa $A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)}$. Puesto que $Q^{(i)}$ es ortogonal, $R^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)}$ y entonces tenemos que:

$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} = (Q^{(i)t}A^{(i)})Q^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)}Q^{(i)}$$

entonces $A^{(i+1)}$ es simétrica con los mismos valores que $A^{(i)}$. Por la forma en que se definió $Q^{(i)}$ y $R^{(i)}$ podemos garantizar que $A^{(i+1)}$ es tridiagonal.

Por inducción, $A^{(i+1)}$ tiene los mismos autovalores que A , esto se debe a que $A^{(i+1)}$ tiende a una matriz diagonal con los autovalores de A en la diagonal. Pero necesitamos describir la construcción de las matrices $R^{(i)}$ y $Q^{(i)}$. Considerando conocido el concepto de matriz de rotación procederemos con la explicación.

Es fácil ver que si P es una matriz de rotación, AP difiere de A sólo en las i -ésima y j -ésima columnas mientras que la matriz PA en las i -ésima y j -ésima filas. Si tomamos para $i \neq j$ elegimos el ángulo θ tal que PA tenga un cero en (PA_{ij}) . La factorización de $A^{(1)}$ en $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$ usa un producto de $n-1$ matrices de rotación de este tipo para construir:

$$R^{(i)} = P_n P_{n-1} \dots P_2 A^{(1)}$$

primero establecemos que P_2 tenga:

$$p_{11} = p_{22} = \cos(\theta_2) \quad \text{y} \quad p_{12} = -p_{21} = \sin(\theta_2)$$

donde:

$$\cos(\theta_2) = \frac{a_1}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\theta_2) = \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}}$$

entonces la matriz $A_2^{(1)} = P_2 A^{(1)}$ tiene un cero en la posición (2,1) ya que este elemento es:

$$(-\sin(\theta_2))a_1 + \cos(\theta_2)b_2 = \frac{-a_1 b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} = 0$$

Como la multiplicación $P_2 A^{(1)}$ afecta a las filas 1 y 2 de $A^{(1)}$, la nueva matriz no necesariamente conserva los elementos (1,3),(1,4),(1,5),... y (1,n) sean cero. Pero $A^{(1)}$ es tridiagonal y por ende, los elementos (1,4),(1,5),... y (1,n) de $A_2^{(1)}$ son cero.

De forma general tomamos la matriz P_k tal que el elemento $(k,k-1)$ de $A_k^{(1)} = P_k A_{k-1}^{(1)}$ sea cero, lo cual provoca que el elemento $(k-1,k+1)$ sea distinto de cero. La matriz $A_k^{(1)}$ es:

$$A_k^{(1)} = \begin{pmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & z_{k-1} & q_{k-1} & r_{k-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & x_k & y_k & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{k+1} & a_{k+1} & b_{k+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & & b_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

y P_{k+1} tiene la forma:

$$A_k^{(1)} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & & O & O \\ O & c_{k+1} & s_{k+1} & O \\ O & -s_{k+1} & c_{k+1} & O \\ O & & O & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

donde O es la matriz nula con su respectiva dimensión. $c_{k+1} = \cos \theta_{k+1}$ y $s_{k+1} = \sin \theta_{k+1}$ en P_{k+1} hacen que el elemento de $A_{k+1}^{(1)}$ sea cero y esta matriz tiene la forma:

$$A_{k+1}^{(1)} = \begin{pmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & z_k & q_k & r_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & x_{k+1} & y_{k+1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{k+2} & a_{k+2} & b_{k+3} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & & b_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Si continuamos con esta construcción en la sucesión P_2, \dots, P_n nos queda la matriz:

$$R^{(1)} \equiv A_n^{(1)} = \begin{pmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-2} \\ \vdots & & & & & \ddots & z_{n-1} & q_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

La otra mitad de la factorización QR es $Q^{(1)} = P_2^t, P_3^t, \dots, P_n^t$ porque la ortogonalidad de las matrices implica que:

$$Q^{(1)}R^{(1)} = (P_2^t, P_3^t, \dots, P_n^t) \bullet (P_2, P_3, \dots, P_n)A^{(1)} = A^{(1)}$$

Por otro lado la matriz $Q^{(1)}$ es ortogonal ya que:

$$(Q^{(1)})^t Q^{(1)} = (P_2^t, P_3^t, \dots, P_n^t)^t \bullet (P_2^t, P_3^t, \dots, P_n^t) = (P_n, \dots, P_2) \bullet (P_2^t, P_3^t, \dots, P_n^t) = I$$

Algo curioso es que $Q^{(1)}$ es una matriz de Hessenberg superior y, en consecuencia, $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$ también lo es ya que la multiplicación de $Q^{(1)}$ de la izquierda por la matriz $R^{(1)}$ no afecta los elementos del triángulo inferior. Todo lo mencionado implica que $A^{(2)}$ efectivamente es tridiagonal. El proceso se repite para $A^{(3)}, A^{(4)}, \dots$

Si los autovalores de A tiene módulos distintos, con $|\lambda_1| \succ |\lambda_2| \succ \dots \succ |\lambda_n|$, entonces la rapidez de la convergencia de $b_{j+1}^{(i+1)}$ a 0 en la matriz $A^{(i+1)}$ depende del cociente $|\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}|$. La velocidad de convergencia de $b_{j+1}^{(i+1)}$ a 0 determina la razón con la que el elemento $a_{j+1}^{(i+1)}$ converge al j -ésimo autovalor λ_j . Así, la rapidez de convergencia puede ser lenta si $|\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}|$ está cerca de la unidad.

Si A tiene los autovalores del mismo módulo, $b_j^{(i+1)}$ puede tender a cero para alguna $j \neq n$ con mayor rapidez que $b_n^{(i+1)}$. Si esto sucede podemos separar las matrices como mencionamos al principio de la explicación del algoritmo. De esta manera convertiríamos el problema en 2 subproblemas de orden reducido.

Capítulo 2

Desarrollo

El objetivo como mencionamos anteriormente es mantener el edificio en pie luego del desastre natural. Una vez que tenemos nuestra matriz objetivo A (ver enunciado) debemos calcular los autovalores de la misma, y estos serán negativos. A los n autovalores de A le aplicaremos la raíz una vez que todos hayan sido multiplicados por (-1) para no aplicarla a valores menores a cero. Esos n nuevos valores deben estar fuera del intervalo $[2.7, 3.3]$. Si es así entonces nuestro edificio estará seguro y no caerá. Sino, el edificio está en peligro con lo cual debemos hacer algo.

Nuestra idea será cambiar los lavarropas de piso, es decir, modificar los valores de la diagonal de la matriz M (ver enunciado) y calcular de nuevo los autovalores de A . Con el cambio de valores en la diagonal de M también cambian los autovalores de A y nuevamente, aplicándoles raíz, verificamos si la frecuencia de todos los pisos no está en el intervalo $[2.7, 3.3]$. Con esto podríamos chequear si el movimiento sirve o no. Con lo mencionado podemos observar que los algoritmos de chequeo no son "livianos" a la hora de ejecutarlos ya que para ver si nuestro edificio se cae debemos ejecutar el algoritmo QR para el cálculo de autovalores, cuya complejidad es $O(n^4)$. Esta es la razón por la cual no deberíamos mover tantos lavarropas ni tampoco sería deseable verificar la estabilidad en cada momento. De ahí proviene la importancia de las heurísticas para resolver este problema.

Este es un problema abierto y como tal presentaremos heurísticas que traten de acercarse lo mejor posible a la solución ideal u óptima, es decir, tratar de evitar que nuestro edificio se derrumbe moviendo la mínima cantidad de lavarropas. Algunas "pseudo-soluciones" presentadas utilizan la intuición como principal contenido teórico. Un ejemplo de ello sería apilar una cierta cantidad de lavarropas en los pisos inferiores tratando de alivianar el peso de arriba porque uno supone que cuando más peso hay en los pisos superiores, más probabilidades de que se caiga hay. Otras heurísticas se diseñaron teniendo en cuenta la relación directa entre la masa total del piso y los autovalores calculados.

A continuación enumeraremos los distintos métodos escogidos para intentar salvar el edificio.

2.1. Heurística 1: Método de la mitad superior

Lo que este método hace es ubicarse en el piso del medio, es decir, si n es la cantidad de pisos, el piso del medio es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ en el caso de n impar, y $\frac{n}{2}$ si es par. Una vez ubicado en este piso, llamémoslo i_{med} , comenzamos del piso n (el último) preguntando si hay lavarropas. Si hay, lo movemos hacia el piso i_{med} , luego preguntamos si resistirá el temblor, si lo resiste, dejamos todo como está (con lo cual hicimos solo un paso), si se cae, sacamos un lavarropas del piso $n-1$ esta vez (siempre y cuando lo tenga, sino, paso al piso $n-2$) y lo volvemos a

ubicar en i_{med} y nuevamente preguntamos, si se cae entonces quitamos un lavarropas del piso $n-2$, sino, ya estaría. Así seguimos hasta llegar al piso $i_{med} + 1$. Si todavía quedan lavarropas volvemos al último piso y comenzamos nuevamente. Continuamos hasta que el piso se caiga o no haya mas lavarropas en los $n - i_{med}$ pisos superiores. Aquí pasa algo fácil de prever y es que si el método llegase a quitar todos los lavarropas de todos los pisos de arriba incluyendo del piso $i_{med} + 1$ quiere decir que el edificio caerá porque ninguna configuración encontrada anteriormente por el **método de la mitad superior** fue lo suficientemente buena como para prevenir la caída del depósito.

Como mencionamos antes, esta es una heurística de noción intuitiva, es decir, tratamos de balancear el peso concentrandolo en el piso del medio. Lo que además hacemos es chequear las frecuencias en cada movimiento. Podemos ver que por cada verificación de estabilidad ejecutamos QR que es del orden de $O(n^4)$ recordando que n es la cantidad de pisos del edificio. Ahora surge la pregunta: cuantas veces lo ejecutamos?? Esto requiere un análisis de complejidad.

2.1.1. Complejidad del Método de la mitad superior

Consideramos para este cálculo de complejidades que las operaciones matemáticas se ejecutan en tiempo constante para simplificar los cálculos, esto es, las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia, raíz, etc, cuestan $O(1)$.

Ya sabemos que ejecutar el metodo QR cuesta $O(n^4)$ cada vez que se utiliza, donde n es la cantidad de pisos del edificio. Lo peor que nos puede pasar es que se ejecute todas las veces posibles, es decir, que cambiando de lugar todos los lavarropas de los pisos superiores se ejecute QR. Hay que calcular la cantidad maxima de lavarropas que podemos mover, para ello usaremos la siguiente notación: sea c_i la cantidad de lavarropas del piso i , luego lo peor que puede pasar es que mueva todos los lavarropas del piso i y esto se lleva a cabo en c_i iteraciones (porque saco de a un lavarropas por vez). Entonces si tengo que retirar todos los electrodomésticos de cada piso se obtiene:

$$\sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n c_i O(n^4) = O(n^4) * \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n c_i \quad (2.1)$$

De 2.1 podemos sacar una noción de lo que cuesta pero podemos refinarlo aún más:

$$\begin{aligned} O(n^4) * \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n c_i &\leq O(n^4) * \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n c_{max} \leq \\ &\leq O(n^4) * c_{max} * \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n 1 \leq \\ &\leq n * c_{max} * O(n^4) \in O(c_{max} n^5) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Finalmente en 2.2 tenemos una noción de la complejidad de este método. c_{max} representa la cantidad máxima de lavarropas maxima por piso en promedio (una manera de poder decir que el total de los lavarropas esté distribuido en la segunda mitad del depósito). Una importante obvservación es que no podemos saber exactamente cuán grande es c_{max} pero sí sabemos que lo podemos poner en función de n con lo cual nos daría una complejidad del orden de n^6 o incluso más. Por ejemplo, tranquilamente en un edificio de 10 pisos podemos tener más de 100 lavarropas, de hecho, intuitivamente, uno está tentado a decir que seguramente hay mas de 100 lavarropas ya que es un edificio-depósito, pero como esto podría no ser así, lo dejamos expresado como c_{max} .

En la sección de resultados veremos cuán efectivo es este método comparado con los otros que veremos a continuación.

2.2. Heurística 2: Método de intercambio bidireccional

La idea principal en el **método de la mitad superior** era apelar a la intuición. Es decir, tratar de lograr que un edificio se caiga reduciendo el peso de los pisos superiores lo cual sonaría lógico. Ahora nos vamos a enfocar en la relación del valor de la masa de un piso con el autovalor calculado. Para ello tuvimos en cuenta dos cosas, a saber:

- Relación masa-frecuencia: analizamos que pasa cuando la masa del piso ($m_i = m_0 + t_i p$) disminuye o aumenta y cómo esto repercute en los autovalores (frecuencias)
- Relación frecuencia-frecuencia: analizamos como se relacionan las frecuencias entre sí

Para el primer caso lo que pensamos es que a mayor masa más grande es el autovalor (frecuencia), y para el segundo nos dimos cuenta que estos están en orden decreciente en la diagonal de la matriz resultado (aquella que posee los autovalores en la diagonal), es decir, el elemento en el (0,0) es el mayor y el elemento (n-1,n-1) es el menor. Una vez aclarado esto procederemos con el **método de intercambio bidireccional**.

Supongamos que ya tenemos la matriz con las frecuencias (autovalores) calculada. Como ya sabemos, estos están ordenados de mayor a menor, luego tomamos la menor frecuencia dentro del intervalo [2.7,3.3], por ejemplo, si tenemos los valores 2, 2.3, 2.72, 2.80, 3.2, 4.3, 4.5, solo los valores 2.72, 2.80, 3.2 entran en el intervalo y de ellos tomo el 2.72. Ahora me fijo qué número de piso es, llamémoslo i_{min} y por ahora suponemos que $i_{min} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (donde n es la cantidad de pisos). Una vez obtenido i_{min} vamos a mover lavarropas entre ese piso y los demás. Supongamos que elegimos el piso j con $j \neq i_{min}$, lo que hacemos con este piso e i_{min} pueden ser dos cosas:

1. mover desde i_{min} a j un lavarropa y luego de esto verificar si la frecuencia del piso i_{min} **disminuye**. Si es así continuamos pasando lavarropas al piso j . Mientras estamos pasando lavarropas vemos las veces que la frecuencia del piso i_{min} disminuye, o sea, chequeamos con cada intercambio si el edificio con ese lavarropas en j da para i_{min} una frecuencia menor. Si no se hace más chica en 10 intercambios, esto es, que la frecuencia del piso i_{min} decrezca por cada lavarropas quitado, dejamos todo como estaba al principio (es decir, le devolvemos a i_{min} los lavarropas que pasamos a j como si no hubiesemos tocado nada). Si la frecuencia decrece 10 veces entonces guardamos los cambios y continuamos con otro piso pero sin movernos de i_{min} , solo cambiamos el piso j .
2. mover desde j a i_{min} un lavarropa y luego de esto verificar si la frecuencia del piso i_{min} **disminuye**. Si es así, continuamos pasando lavarropas al piso i_{min} . Mientras estamos pasando lavarropas vemos las veces que la frecuencia del piso i_{min} disminuye, o sea, chequeamos con cada intercambio si el edificio con ese nuevo lavarropas para i_{min} tiene una frecuencia menor. Si no se hace más chica en 10 intercambios, esto es, que la frecuencia del piso i_{min} decrezca por cada lavarropas agregado, dejamos todo como estaba al principio (es decir, le devolvemos a j los lavarropas que pasamos a i_{min} como si no hubiesemos tocado nada). Si la frecuencia decrece en cada iteración durante las 10 iteraciones entonces guardamos los cambios y continuamos con otro piso, de vuelta sin movernos de i_{min} .

Esto es un árbol binario de posibilidades, es decir, para cada instancia lo que hacemos es probar (1) (sacar lavarropas de i_{min}) y si no mejora optamos por (2). Como vemos, no hacemos backtracking porque analizamos (1) y si no funciona, automáticamente seguimos

con (2), no hay vuelta atras, no analizamos ambas ramas por igual, solo analizamos el presente del edificio y optamos por una sola.

Qué pasa si i_{min} se queda sin lavarropas? Bueno si esto sucede lo que tenemos que hacer es cambiar de piso y pasar a otro piso $j=j+1$. Pero en este caso, se ejecuta (2) ya que no podemos sacarle lavarropas a i_{min} . Este procedimiento lo ejecutamos hasta que hayamos pasado por todos los pisos $j \neq i_{min}$.

Otro detalle es que arriba suponíamos $i_{min} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pero qué pasa si es mayor?? En este caso no chequeamos si la frecuencia decrece sino chequeamos si aumenta. Esto tiene un porqué y es porque si el piso esta de la mitad para arriba los que están por encima de el tiene mayor frecuencia y es muy probable que estén fuera de peligro (es decir que su frecuencia no este en $[2.7, 3.3]$) con lo cual, al incrementar la frecuencia de i_{min} también incrementamos la de los pisos superiores con lo cual siguen fuera de peligro.

A continuación veremos la complejidad de este método para darnos una instancia más de comparación con los demás.

2.2.1. Vector de movimientos

Algo importante (y cuya utilidad se verá mas adelante) es el vector de movimientos. Es un vector que dado dos pisos i, j tales que $i, j \leq n$ y $j \neq i$ se resta 1 en v_i y un 1 en v_j si se movió un lavarropas de i a j . Nótese que hay valores tanto positivos como negativos e inicialmente el vector es de 0's.

2.2.2. Complejidad del método de intercambio bidireccional

Bueno como primer medida nos cuesta $O(n^4)$ (algoritmo QR) calcular el primer vector de autovalores v_0 . Buscar el mínimo valor del intervalo $[2.7, 3.3]$ presente en v_0 nos cuesta $O(n)$ (ya que debemos recorrer todos los elementos del vector). Luego debemos ejecutar por cada par de pisos escogido 10 veces QR si sumamos hasta lo ultimo y 10 si restamos, digamos entonces que por cada par ejecutamos QR en cada iteración, luego la complejidad esta dada por:

$$\sum_{j=1}^n O(n^4) * 20 = O(n^4) * 20 \sum_{j=1}^n 1 = O(n^4) * 20 * n \in O(c * n^5) \quad (2.3)$$

Donde c es una constante.

2.3. Heurística 3: Método de Reducción planificada dependiente (búsqueda local)

El **Método de intercambio bidireccional** logra mantener el edificio en pie (al menos lo logra en los casos propuestos por los docentes) pero ejecuta muchos pasos (datos más minuciosos de esto se verá en la sección Resultados) con lo cual, si tenemos muy poco tiempo, para mover rápido esa cantidad de lavarropas vamos a necesitar a Superman, Batman, Spiderman, los 4 Fantásticos, los Alcónes Galácticos y los Thundercats y porqué no, los X-Men. Por esta razón, y porque no encontramos a ninguno de estos superhéroes, hay que reducir al cantidad de pasos y ese es el principal objetivo de este método.

Primero recorremos el vector de movimientos v , hallando su máximo y su mínimo y a partir de ese momento comenzamos a hacer una búsqueda local tratando de ver si podemos mejorar la cantidad de lavarropas a mover. Es importante mencionar que este método depende del otro, no es un método independiente, primero ejecutamos el método de intercambio bidireccional y de ese vector de movimientos partimos en nuestra búsqueda.

Sean v_{max} y v_{min} los elementos máximo (máximo de los elementos positivos) y mínimo (mínimo de los elementos negativos) respectivamente. Lo que hacemos es mover un lavarropas desde la posición max hasta min siempre y cuando el edificio no se derrumbe, es decir, restamos 1 en v_{max} y sumamos 1 en v_{min} . Luego de mover una x cantidad de lavarropas a v_{min} sin que nuestro edificio colapse, lo excluimos al estilo Tabu-Search para no volver a analizarlo y, una vez excluido, buscamos otro mínimo. Repetimos el proceso hasta haber marcado todos los negativos, recordemos que solo tomamos el mínimo entre los elementos negativos y el máximo entre los positivos para intentar lograr un equilibrio, es decir, tratar de acercar a cero los valores positivos como los negativos ya que un vector cercano a 0's indica poca cantidad de movimientos.

Una vez que se marcaron todos los mínimos nos toca cambiar v_{max} (y desmarcar los negativos que marcamos antes), entonces escogemos un nuevo máximo sin tener en cuenta el que usamos, el cual también será marcado para no escogerlo en posteriores iteraciones. Con este nuevo v_{max} hacemos lo mismo que con el anterior, buscamos un v_{min} y comenzamos a pasarle lavarropas siempre y cuando el edificio no se caiga. Repetimos esto hasta marcar todos los mínimos nuevamente.

Cuando terminamos con un máximo y un mínimo tenemos lo que llamamos una "pasada". Por razones puramente experimentales decidimos ejecutar este proceso n^2 veces (recordemos que n es la cantidad de pisos), es decir, hacemos sobre el vector de movimientos n^2 pasadas (siempre cambiando y marcando lo que corresponde). Vemos que con n^2 pasadas nos alcanza para cubrir todos los máximos al menos 2 veces, es decir, con n^2 "pasadas" nos alcanza para que tomemos v_{max} y lo analicemos con todos los mínimos, luego restan iteraciones para buscar otro v_{max} y trabajar nuevamente con los mínimos, de hecho, quedan las fucinetes para marcar todos los máximos al menos una vez. Cuando hemos marcado todos los máximos y quedan pasadas, los desmarcamos y volvemos desde el principio pero esta vez con nuevos valores. Esto indica que tenemos mucha cantidad de verificaciones. Lo malo de hacer esa cantidad de pruebas es la cantidad de computo necesaria, razón por la cual ésta heurística es más pesada a la hora de compararla con otras.

Resumiendo, el objetivo de este método es tratar de balancear el vector de movimientos. Tratamos de hacer que los elementos más grandes decrezcan lo mayor posible y los más chicos (que son los negativos) crezcan hasta llegar lo más que puedan al cero. Esto lo logramos porque tomamos un piso con muchos lavarropas (el máximo del vector de movimientos) y agarramos uno al que sabemos se le han quitado muchos (mínimo del vector de movimientos). Esto lo hacemos varias veces, hasta que ya no tengamos un máximo local al cual poder sacarle más lavarropas. Esta heurística combina los dos aspectos en los cuales nos basamos para la fabricación de heurísticas, la intuición que uno puede tener de lo que va a pasar y la relación entre sus elementos y como la modificación de éstos repercuten en los demás.

Con este método NO buscamos principalmente que el edificio se mantenga en pie, sino que partiendo de la base de que sabemos que se va a mantener de pie con la configuración actual, pretendemos reducir la cantidad de pasos que tendríamos que efectuar para salvar el edificio. Notemos que si ejecutamos la Heurística 2 la cantidad de movimientos necesarios es mayor. Este método parte de una solución (que se considera como un mínimo local) brindada por la heurística mencionada anteriormente y trata de mejorarla encontrando algún mínimo local más cercano al mínimo absoluto.

2.3.1. Complejidad del método de reducción planificada

Como hablamos de "pasadas", y que realizamos n^2 pasadas, debemos aclarar que cada pasada nos cuesta $O(n^4)$ por ejecutar el algoritmo de QR para el cálculo de autovalores.

Como se realizan $O(n^2)$ pasadas la complejidad del algoritmo estará en $O(c * n^6)$ donde c es una constante.

Capítulo 3

Resultados

En esta sección se presentarán los resultados de los experimentos que realizamos. Mostramos los casos de test proporcionados por los docentes y cómo quedó el edificio luego de correr cada heurística.

Los datos presentados se organizan de la siguiente manera:

- Primero se ve el título de cada heurística
- Segundo se muestra en cada heurística el nombre del caso de test y cómo queda el edificio, esto es, distribución de lavarropas, cantidad de movimientos, etc.

3.0.2. Método de Reducción planificada dependiente (con método de intercambio bidireccional como solución base)

Test 5c:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias Finales	4.12417	3.52725	2.68521	1.699	0.584068
Cantidad de Lavarropas Finales	209	1	1	1	368
Movimientos	109	-119	-109	-139	258

Cantidad de Lavarroas Movidos:367

Test 5b:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias finales	2.69991	2.4111	1.90847	1.18186	0.409694
Cantidad de lavarropas finales	33	296	110	140	1
Movimientos	-67	176	0	0	-109

Cantidad de lavarropas movidos:176

Test 5a:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias finales	2.69991	2.4111	1.90847	1.18186	0.409694
Cantidad de lavarropas finales	33	296	110	140	1
Movimientos	-67	176	0	0	-109

Cantidad de lavarropas movidos: 176

Test 5:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias finales	2.69995	2.3815	1.90401	1.23074	0.412247
Cantidad de lavarropas finales	83	175	143	178	1
Movimientos	-5	55	33	26	-109

Cantidad de lavarropas movidos: 114

Test 3:

—	piso0	piso1	piso2
Frecuencias finales	2.69992	1.82318	0.676128
Cantidad de lavarropas finales	56	35	1
Movimientos	16	15	-31

Cantidad de lavarropas movidos: 31

Test 20:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4	piso5	piso6	piso7	piso8	piso9
Frecuencias finales	4.12963	4.14221	4.29455	4.31116	3.8188	3.73488	3.74956	3.40865	3.36938	2.69992
Cantidad de lavarropas finales	128	117	168	1	236	126	247	1	237	303
Movimientos	19	-3	50	-139	126	26	136	-99	117	229

—	piso10	piso11	piso12	piso13	piso14	piso15	piso16	piso17	piso18	piso19
Frecuencias finales	2.59128	2.46544	2.1813	1.94499	1.6447	1.3781	1.07836	0.776649	0.466043	0.160127
Cantidad de lavarropas finales	1	237	1	179	1	118	1	122	1	15
Movimientos	-99	108	-109	39	-109	16	-109	22	-119	-102

Cantidad de lavarropas movidos: 888

Test 10a:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4	piso5	piso6	piso7	piso8	piso9
Frecuencias finales	9.22637	9.825	7.48465	6.66113	6.12031	5.32569	4.2839	3.30001	1.76894	0.636584
Cantidad de lavarropas finales	200	1	145	458	160	1	1	155	478	1
Movimientos	9	-169	-134	268	0	-149	-159	185	308	-159

Cantidad de lavarropas movidos: 770

Test 10:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4	piso5	piso6	piso7	piso8	piso9
Frecuencias finales	9.20266	9.56499	7.73247	6.97464	6.50663	5.47372	4.52033	3.30007	1.9309	0.683363
Cantidad de lavarropas finales	171	1	173	224	110	100	1	110	229	1
Movimientos	42	-119	63	84	0	-99	-109	138	109	-109

Cantidad de lavarropas movidos: 436

3.0.3. Método de intercambio bidireccional

Test 5c:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias Finales	3.94946	3.58015	2.63087	1.74565	0.597129
Cantidad de Lavarropas Finales	209	1	368	1	1
Movimientos	109	-119	258	-139	-109

Cantidad de Lavarroas Movidos:367

Test 5b:

—	pis0	pis1	pis2	pis3	pis4
Frecuencias finales	2.69609	2.42102	1.91518	1.17933	0.40922
Cantidad de lavarropas finales	1	328	110	140	1
Movimientos	-99	208	0	0	-109

Cantidad de lavarropas movidos:208

Test 5a:

—	pis0	pis1	pis2	pis3	pis4
Frecuencias finales	2.69609	2.42102	1.91518	1.17933	0.40922
Cantidad de lavarropas finales	1	328	110	140	1
Movimientos	-99	208	0	0	-109

Cantidad de lavarropas movidos: 208

Test 5:

—	pis0	pis1	pis2	pis3	pis4
Frecuencias finales	2.69219	2.50125	1.94192	1.19646	0.414421
Cantidad de lavarropas finales	21	291	143	124	1
Movimientos	-67	171	33	-28	-109

Cantidad de lavarropas movidos: 204

Test 3:

—	pis0	pis1	pis2
Frecuencias finales	2.69578	1.83085	0.674384
Cantidad de lavarropas finales	32	59	1
Movimientos	-8	39	-31

Cantidad de lavarropas movidos: 39

Test 20:

—	pis0	pis1	pis2	pis3	pis4	pis5	pis6	pis7	pis8	pis9
Frecuencias finales	4.2694	4.13383	4.49475	4.19086	3.99684	3.93287	3.65972	3.67466	3.31142	2.64395
Cantidad de lavarropas finales	128	1	173	1	237	1	248	1	360	367
Movimientos	19	-119	55	-139	127	-99	137	-99	240	293

—	pis10	pis11	pis12	pis13	pis14	pis15	pis16	pis17	pis18	pis19
Frecuencias finales	2.62148	2.44	2.17242	1.94836	1.64347	1.39769	1.05678	0.771591	0.459574	0.157916
Cantidad de lavarropas finales	1	237	1	179	1	55	1	1	135	112
Movimientos	-99	108	-109	39	-109	-47	-109	-99	15	-5

Cantidad de lavarropas movidos: 1033

Test 10a:

—	pis0	pis1	pis2	pis3	pis4	pis5	pis6	pis7	pis8	pis9
Frecuencias finales	9.26482	9.8483	7.46366	6.72574	6.13039	5.34518	4.33162	3.3113	1.75487	0.634296
Cantidad de lavarropas finales	150	1	140	508	160	1	1	160	478	1
Movimientos	-41	-169	-139	318	0	-149	-159	190	308	-159

Cantidad de lavarropas movidos: 816

Test 10:

—	pis0	pis1	pis2	pis3	pis4	pis5	pis6	pis7	pis8	pis9
Frecuencias finales	9.93986	9.5852	7.62175	7.28598	6.66251	5.46545	4.51136	3.37644	1.89743	0.676879
Cantidad de lavarropas finales	100	1	1	467	110	100	1	110	229	1
Movimientos	-29	-119	-109	327	0	-99	-109	138	109	-109

Cantidad de lavarropas movidos: 574

3.0.4. Método de la mitad superior

Test 5c:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias Finales	3.9278	3.52289	2.69978	1.72904	0.591965
Cantidad de Lavarropas Finales	100	120	230	80	50
Movimientos	0	0	120	-60	-60

Cantidad de Lavarroas Movidos:120

Test 5b:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias finales	2.6998	2.44947	1.85412	1.1963	0.409853
Cantidad de lavarropas finales	100	120	302	44	14
Movimientos	0	0	192	-96	-96

Cantidad de lavarropas movidos:192

Test 5a:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias finales	2.6998	2.44947	1.85412	1.1963	0.409853
Cantidad de lavarropas finales	100	120	302	44	14
Movimientos	0	0	192	-96	-96

Cantidad de lavarropas movidos: 192

Test 5:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4
Frecuencias finales	2.81676	2.55222	1.78892	1.25522	0.417517
Cantidad de lavarropas finales	100	120	360	0	0
Movimientos	0	0	250	-140	-110

Cantidad de lavarropas movidos: 250

Test 3:

—	piso0	piso1	piso2
Frecuencias finales	2.69954	1.82744	0.674568
Cantidad de lavarropas finales	40	47	5
Movimientos	0	27	-27

Cantidad de lavarropas movidos: 27

Test 20:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4	piso5	piso6	piso7	piso8	piso9
Frecuencias finales	4.34162	4.46561	4.42082	4.29875	4.20938	3.70081	3.72717	3.39498	3.25491	3.10776
Cantidad de lavarropas finales	100	120	110	140	110	100	110	100	120	110
Movimientos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

—	piso10	piso11	piso12	piso13	piso14	piso15	piso16	piso17	piso18	piso19
Frecuencias finales	2.70159	2.62481	2.24729	1.97247	1.74288	1.33281	1.14181	0.736372	0.482452	0.160758
Cantidad de lavarropas finales	1120	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Movimientos	-120	-110	-140	-110	-100	-110	-100	-120	-110	

Cantidad de lavarropas movidos: 1020

Test 10a:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4	piso5	piso6	piso7	piso8	piso9
Frecuencias finales	8.99015	9.33551	7.58624	7.64528	6.18769	5.32791	4.40181	2.83746	1.99528	0.658323
Cantidad de lavarropas finales	150	170	140	190	160	790	0	0	0	0
Movimientos	0	0	0	0	0	640	-160	-150	-170	-160

Cantidad de lavarropas movidos: 640

Test 10:

—	piso0	piso1	piso2	piso3	piso4	piso5	piso6	piso7	piso8	piso9
Frecuencias finales	9.01882	9.72394	7.79123	7.90045	6.5613	5.49029	4.63544	3.02833	2.05758	0.693496
Cantidad de lavarropas finales	100	120	110	140	110	540	0	0	0	0
Movimientos	0	0	0	0	0	440	-110	-100	-120	-110

Cantidad de lavarropas movidos: 440

Estos son los resultados y en la siguiente sección discutiremos acerca de cuál heurística es la que mejores resultados no dió.

Capítulo 4

Discusión

DISCUSION

Capítulo 5

Conclusión

CONCLUSION

Capítulo 6

Apéndice A

Laboratorio de Métodos Numéricos - Primer cuatrimestre 2009 Trabajo Práctico Número 3: Cuando pase el temblor ...

El trabajo práctico consiste en evaluar la resistencia sísmica de un edificio de varios pisos que funciona como depósito, proponiendo un plan de reubicación del depósito lo más eficiente posible.

Figura 1: Modelo del edificio

El modelo

Consideremos un edificio de n pisos como en la Figura 1. Un modelo sencillo para estudiar el comportamiento de un terremoto sobre el edificio consiste en considerar cada piso $i = 1, \dots, n$ como un bloque de masa m_i , unido a los pisos adyacentes por medio de un conector elástico cuya acción se parece a la de un resorte. Para $i = 0, \dots, n - 1$, la unión entre los pisos i e $i + 1$ suministra una fuerza de restitución

$$F_i = k_i(x_{i+1} - x_i),$$

donde $x_i : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ representa el desplazamiento horizontal del i -ésimo piso en cada instante (asumimos que $i = 0$ corresponde al suelo y que $x_0 = 0$). Aplicando la segunda ley de Newton del movimiento, $F = ma$, a cada sección del edificio, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$m_1 x_1'' = -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1)$$

$$\begin{aligned}
m_2 x_2'' &= -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\
m_3 x_3'' &= -k_2(x_3 - x_2) + k_3(x_4 - x_3) \\
&\vdots \\
m_n x_n'' &= -k_{n-1}(x_n - x_{n-1})
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Escrito en forma matricial, este sistema toma la forma $MX'' = KX$, donde $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal con las masas de los pisos y $K \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz tridiagonal con los coeficientes de rigidez adecuados:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -(k_0 + k_1) & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & -k_{n-1} \end{pmatrix}$$

Como $m_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$, entonces M tiene inversa y el sistema se puede reescribir como $X'' = (M^{-1}K)X = AX$, donde $A = M^{-1}K$ tiene autovalores negativos.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A . Los valores $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, para $i = 1, \dots, n$, representan las frecuencias naturales del sistema, e indican la estabilidad del edificio durante un terremoto. Si la frecuencia del sismo es muy próxima a alguna de estas frecuencias, hay riesgo de que el edificio entre en resonancia y colapse.

El problema

Nos encontramos en el depósito de lavarropas de una conocida casa de electrodomésticos, y se avecina un terremoto sobre nuestra ciudad. Nuestro informante en el Departamento de Geología de la FCEyN nos ha avisado que el terremoto tendrá una frecuencia de $\omega = 3 \text{ Hz} = 3 \frac{1}{\text{seg}}$.

El edificio completo se utiliza como depósito de un único modelo de lavarropas de masa p , de modo tal que si el piso i tiene t_i artículos, entonces su masa es $m_i = m_0 + t_i p$. El problema que debemos resolver -y rápidamente- consiste en determinar cuántos lavarropas debemos quitar de cada piso (reubicándolos en otros pisos) para que ninguna de las frecuencias naturales del depósito se encuentre a menos del 10 % de la frecuencia ω del terremoto (es decir, para que cada frecuencia ω_i cumpla $\omega_i \notin [2,7, 3,3]$). La solución óptima del problema es aquella que permite evitar que el edificio colapse, reubicando la menor cantidad posible de lavarropas.

El enunciado

El trabajo práctico consiste en implementar un programa que permita resolver este problema. La solución propuesta debe indicar cuántos lavarropas quitar de cada piso, y a qué pisos se deben llevar dichos lavarropas. Puede utilizarse una heurística para obtener

el plan de reubicación de lavarropas, a criterio del grupo. En caso de que se implemente más de un algoritmo para resolver este problema, el informe deberá contener los resultados de los experimentos realizados para compararlos.

El programa debe incluir una implementación de algún algoritmo para calcular los autovalores de una matriz cuadrada, que deberá ser utilizado durante el proceso de decisión. El programa debe tomar los datos desde un archivo de texto con el siguiente formato:

$$\begin{array}{c} n \ p \ m_0 \\ k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1} \\ t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n \end{array}$$

El informe debe incluir los resultados del algoritmo implementado sobre las instancias de prueba que acompañan al presente enunciado. El grupo que obtenga la mejor redistribución de lavarropas para estas instancias se hará acreedor a una orden de compra por un monto a determinar en la casa de electrodomésticos que auspicia este trabajo práctico.

Fecha de entrega: Lunes 22 de Junio

Capítulo 7

Bibliografía

Bibliografía