

Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học

PGS.TS. Trần Lộc Hùng

Tp. Hồ Chí Minh, 9/ 2013

Ngày 8 tháng 9 năm 2013

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH-MARKETING
KHOA CƠ BẢN, BỘ MÔN TOÁN-THỐNG KÊ

PGS. TS. TRẦN LỘC HÙNG

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN HỌC

Tp. Hồ Chí Minh, 9/2013

Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học

PGS.TS. Trần Lộc Hùng

Tp. Hồ Chí Minh, 9/ 2013

Ngày 8 tháng 9 năm 2013

2

- Xác suất có điều kiện

- Xác suất có điều kiện
- Công thức đầy đủ (toàn phần)

Từ khóa

- Xác suất có điều kiện
- Công thức đầy đủ (toàn phần)
- Xác suất tiên nghiệm

- Xác suất có điều kiện
- Công thức đầy đủ (toàn phần)
- Xác suất tiên nghiệm
- Xác suất hậu nghiệm

- Xác suất có điều kiện
- Công thức đầy đủ (toàn phần)
- Xác suất tiên nghiệm
- Xác suất hậu nghiệm
- Dãy Bernoulli

- Xác suất có điều kiện
- Công thức đầy đủ (toàn phần)
- Xác suất tiên nghiệm
- Xác suất hậu nghiệm
- Dãy Bernoulli
- Các biến cố ngẫu nhiên độc lập

- Xác suất có điều kiện
- Công thức đầy đủ (toàn phần)
- Xác suất tiên nghiệm
- Xác suất hậu nghiệm
- Dãy Bernoulli
- Các biến cố ngẫu nhiên độc lập
- Công thức Bernoulli

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

① Xác suất có điều kiện

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

- 1 Xác suất có điều kiện
- 2 Công thức nhân xác suất

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

- 1 Xác suất có điều kiện
- 2 Công thức nhân xác suất
- 3 Công thức cộng xác suất

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

- 1 Xác suất có điều kiện
- 2 Công thức nhân xác suất
- 3 Công thức cộng xác suất
- 4 Công thức xác suất đầy đủ

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

- 1 Xác suất có điều kiện
- 2 Công thức nhân xác suất
- 3 Công thức cộng xác suất
- 4 Công thức xác suất đầy đủ
- 5 Công thức Bayes

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

- 1 Xác suất có điều kiện
- 2 Công thức nhân xác suất
- 3 Công thức cộng xác suất
- 4 Công thức xác suất đầy đủ
- 5 Công thức Bayes
- 6 Các biến cố độc lập

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

- 1 Xác suất có điều kiện
- 2 Công thức nhân xác suất
- 3 Công thức cộng xác suất
- 4 Công thức xác suất đầy đủ
- 5 Công thức Bayes
- 6 Các biến cố độc lập
- 7 Công thức Bernoulli

Chương 2. Các công thức xác suất cơ bản

- 1 Xác suất có điều kiện
- 2 Công thức nhân xác suất
- 3 Công thức cộng xác suất
- 4 Công thức xác suất đầy đủ
- 5 Công thức Bayes
- 6 Các biến cố độc lập
- 7 Công thức Bernoulli
- 8 Bài tập

Xác suất có điều kiện

- Ví dụ 1. Trong một hộp kín có 5 quả cầu giống hệt nhau về hình dạng và kích thước, trong số đó có 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen. Lấy **lần lượt** ra 2 quả cầu từ hộp đó.

Xác suất có điều kiện

- Ví dụ 1. Trong một hộp kín có 5 quả cầu giống hệt nhau về hình dạng và kích thước, trong số đó có 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen. Lấy **lần lượt** ra 2 quả cầu từ hộp đó.
- Khi đó, nếu

Xác suất có điều kiện

- Ví dụ 1. Trong một hộp kín có 5 quả cầu giống hệt nhau về hình dạng và kích thước, trong số đó có 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen. Lấy **lần lượt** ra 2 quả cầu từ hộp đó.
- Khi đó, nếu
 - 1 gọi A là biến cố quả cầu lấy ra thứ nhất là cầu trắng, thì $P(A) = \frac{3}{5}$.

Xác suất có điều kiện

- Ví dụ 1. Trong một hộp kín có 5 quả cầu giống hệt nhau về hình dạng và kích thước, trong số đó có 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen. Lấy **lần lượt** ra 2 quả cầu từ hộp đó.
- Khi đó, nếu
 - 1 gọi A là biến cố quả cầu lấy ra thứ nhất là cầu trắng, thì $P(A) = \frac{3}{5}$.
 - 2 gọi B là biến cố quả cầu lấy ra thứ hai là cầu trắng, thì sự xảy ra của B phụ thuộc vào sự xảy ra của A.

Xác suất có điều kiện

- Ví dụ 1. Trong một hộp kín có 5 quả cầu giống hệt nhau về hình dạng và kích thước, trong số đó có 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen. Lấy **lần lượt** ra 2 quả cầu từ hộp đó.
- Khi đó, nếu
 - ① gọi A là biến cố quả cầu lấy ra thứ nhất là cầu trắng, thì $P(A) = \frac{3}{5}$.
 - ② gọi B là biến cố quả cầu lấy ra thứ hai là cầu trắng, thì sự xảy ra của B phụ thuộc vào sự xảy ra của A.
 - ③ có hai trường hợp $P(B | A) = P_A(B) = \frac{2}{4}$ và $P(B | \bar{A}) = P_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{4}$.

Xác suất có điều kiện

- Ví dụ 1. Trong một hộp kín có 5 quả cầu giống hệt nhau về hình dạng và kích thước, trong số đó có 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen. Lấy **lần lượt** ra 2 quả cầu từ hộp đó.
- Khi đó, nếu
 - ① gọi A là biến cố quả cầu lấy ra thứ nhất là cầu trắng, thì $P(A) = \frac{3}{5}$.
 - ② gọi B là biến cố quả cầu lấy ra thứ hai là cầu trắng, thì sự xảy ra của B phụ thuộc vào sự xảy ra của A.
 - ③ có hai trường hợp $P(B | A) = P_A(B) = \frac{2}{4}$ và $P(B | \bar{A}) = P_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{4}$.
- Các xác suất $P(B | A)$ và $P(B | \bar{A})$, được gọi là xác suất có điều kiện.

Xác suất có điều kiện

Định nghĩa

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Xác suất để hai biến cố A và B xảy ra đồng thời $P(A \cap B)$.

Xác suất có điều kiện

Định nghĩa

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Xác suất để hai biến cố A và B xảy ra đồng thời $P(A \cap B)$.
- $P(A) > 0$, cho thấy biến cố A đã xảy ra.

Công thức nhân xác suất

Công thức

$$P(A \cap B) = P(B | A) \times P(A)$$

- Có tính đối xứng $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

Công thức nhân xác suất

Công thức

$$P(A \cap B) = P(B | A) \times P(A)$$

- Có tính đối xứng $P(A \cap B) = P(B \cap A)$
- Xác suất để cả hai cầu màu trắng

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.3$$

Công thức cộng xác suất

Tiên đề cộng tính đếm được của xác suất

Nếu

$$A_1, \dots, A_n; A_i \cap A_j = \emptyset$$

thì

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

Công thức cộng xác suất

Trường hợp 2 biến cố xung khắc

Nếu

$$A_1, A_2 \in \mathfrak{B}, A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

thì

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Công thức cộng xác suất

Trường hợp 2 biến cố bất kỳ

Nếu

$$A_1, A_2 \in \mathfrak{B}$$

thì

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Các ví dụ

Ví dụ 1

Hộp thứ nhất có 2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đen. Hộp thứ hai có 1 quả cầu trắng và 1 quả cầu đen. Từ mỗi hộp rút ra (không hoàn lại) 1 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu có cùng màu.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là biến cố quả cầu lấy từ hộp thứ $j, j = 1, 2$ là trắng.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là biến cố quả cầu lấy từ hộp thứ $j, j = 1, 2$ là trắng.
- Khi đó, $\overline{A_j}, j = 1, 2$ là biến cố quả cầu lấy từ hộp thứ $j, j = 1, 2$ là đen.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là biến cố quả cầu lấy từ hộp thứ $j, j = 1, 2$ là trắng.
- Khi đó, $\overline{A_j}, j = 1, 2$ là biến cố quả cầu lấy từ hộp thứ $j, j = 1, 2$ là đen.
- Gọi B là biến cố 2 quả cầu lấy ra cùng màu.

$$B = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}).$$

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là biến cố quả cầu lấy từ hộp thứ $j, j = 1, 2$ là trắng.
- Khi đó, $\overline{A_j}, j = 1, 2$ là biến cố quả cầu lấy từ hộp thứ $j, j = 1, 2$ là đen.
- Gọi B là biến cố 2 quả cầu lấy ra cùng màu.

$$B = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}).$$

- Dễ thấy,

$$(A_1 \cap A_2) \cap (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \emptyset,$$

nên

$$P(B) = P(A_1).P(A_2) + P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}) = \frac{1}{2}$$

Các ví dụ

Ví dụ 2

Trong một lớp 65 sinh viên có 25 sinh viên có thể sử dụng tiếng Anh trong chuyên môn, 18 sinh viên có thể sử dụng tiếng Pháp trong chuyên môn và 6 sinh viên biết sử dụng cả hai ngoại ngữ Anh và Pháp trong chuyên môn. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên từ lớp đó, tính xác suất chọn được sinh viên có thể sử dụng ít nhất một trong hai ngoại ngữ Anh và Pháp trong chuyên môn

Lời giải

- Gọi E là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Anh, F là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Pháp.

Lời giải

- Gọi E là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Anh, F là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Pháp.
- Khi đó, $E \cup F$ là biến cố sinh viên biết ít nhất một trong hai ngoại ngữ Anh và Pháp.

Lời giải

- Gọi E là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Anh, F là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Pháp.
- Khi đó, $E \cup F$ là biến cố sinh viên biết ít nhất một trong hai ngoại ngữ Anh và Pháp.
- Ta có,

$$P(E) = \frac{25}{65}, P(F) = \frac{18}{65}, P(E \cap F) = \frac{6}{65}.$$

Lời giải

- Gọi E là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Anh, F là biến cố sinh viên biết sử dụng tiếng Pháp.
- Khi đó, $E \cup F$ là biến cố sinh viên biết ít nhất một trong hai ngoại ngữ Anh và Pháp.
- Ta có,

$$P(E) = \frac{25}{65}, P(F) = \frac{18}{65}, P(E \cap F) = \frac{6}{65}.$$

- Theo công thức,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{37}{65}.$$

Công thức xác suất đầy đủ

Nhóm đầy đủ các biến cố

Nhóm các biến cố A_1, \dots, A_n được gọi là đầy đủ, nếu

- 1 Xung khắc đôi một: $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$
- 2 Đầy đủ: $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

- Ví dụ 1. Nhóm đầy đủ đơn giản nhất A và \bar{A} .

Công thức xác suất đầy đủ

Nhóm đầy đủ các biến cố

Nhóm các biến cố A_1, \dots, A_n được gọi là đầy đủ, nếu

- 1 Xung khắc đôi một: $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$
- 2 Đầy đủ: $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

- Ví dụ 1. Nhóm đầy đủ đơn giản nhất A và \bar{A} .
- Nhóm đầy đủ còn được gọi là một phân hoạch của không gian Ω .

Công thức xác suất đầy đủ

Công thức

Nếu nhóm các biến cố A_1, \dots, A_n là đầy đủ, B là biến cố xảy ra đồng thời với chỉ một trong các $A_j, j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó,

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j).P(B | A_j).$$

- B và các A_j được sinh ra trong cùng một phép thử.

Công thức xác suất đầy đủ

Công thức

Nếu nhóm các biến cố A_1, \dots, A_n là đầy đủ, B là biến cố xảy ra đồng thời với chỉ một trong các $A_j, j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó,

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j).P(B | A_j).$$

- B và các A_j được sinh ra trong cùng một phép thử.
- Xác suất $P(A_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n$, được gọi là **xác suất tiên nghiệm**.

Công thức xác suất đầy đủ

Công thức

Nếu nhóm các biến cố A_1, \dots, A_n là đầy đủ, B là biến cố xảy ra đồng thời với chỉ một trong các $A_j, j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó,

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j).P(B | A_j).$$

- B và các A_j được sinh ra trong cùng một phép thử.
- Xác suất $P(A_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n$, được gọi là **xác suất tiên nghiệm**.
- Công thức xác suất đầy đủ còn được gọi là công thức xác suất toàn phần

Các ví dụ

Ví dụ 1

Hộp thứ nhất có 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh. Xác suất lựa chọn các hộp lần lượt là $1/3$ và $2/3$. Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ra một viên bi. Tính xác suất lấy được viên bi đỏ.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.
- Dễ thấy, A_1 và A_2 tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3$.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.
- Dễ thấy, A_1 và A_2 tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3$.
- Gọi B là biến cố chọn được viên bi đỏ. Ta có,
 $P(B | A_1) = 2/5, P(B | A_2) = 1/3$

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.
- Dễ thấy, A_1 và A_2 tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3$.
- Gọi B là biến cố chọn được viên bi đỏ. Ta có,
 $P(B | A_1) = 2/5, P(B | A_2) = 1/3$
- Theo công thức,

$$P(B) = P(A_1).P(B | A_1) + P(A_2).P(B | A_2) = 16/45.$$

Các ví dụ

Ví dụ 2

Hộp thứ nhất có 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh. Từ hộp thứ nhất lấy ra một viên bi bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó, từ hộp thứ hai lấy ra một viên bi. Tính xác suất lấy được viên bi đỏ.

Lời giải

- Gọi A là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là bi đỏ. Khi đó, \overline{A} là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là trắng.

Lời giải

- Gọi A là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là bi đỏ. Khi đó, \bar{A} là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là trắng.
- Dễ thấy, A và \bar{A} tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A) = 2/5, P(\bar{A}) = 3/5$.

Lời giải

- Gọi A là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là bi đỏ. Khi đó, \bar{A} là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là trắng.
- Dễ thấy, A và \bar{A} tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A) = 2/5, P(\bar{A}) = 3/5$.
- Gọi B là biến cố chọn được viên bi đỏ từ hộp thứ hai. Ta có, $P(B | A) = 2/4, P(B | \bar{A}) = 1/4$

Lời giải

- Gọi A là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là bi đỏ. Khi đó, \bar{A} là biến cố viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là trắng.
- Dễ thấy, A và \bar{A} tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A) = 2/5, P(\bar{A}) = 3/5$.
- Gọi B là biến cố chọn được viên bi đỏ từ hộp thứ hai. Ta có, $P(B | A) = 2/4, P(B | \bar{A}) = 1/4$
- Theo công thức,

$$P(B) = P(A).P(B | A) + P(\bar{A}).P(B | \bar{A}) = 7/20.$$

Công thức xác suất Bayes

Công thức

Nếu nhóm các biến cố A_1, \dots, A_n là đầy đủ, B là biến cố xảy ra đồng thời với chỉ một trong các $A_j, j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó,

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B | A_j)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B | A_j)}.$$

- B và các A_j được sinh ra trong cùng một phép thử, thỏa mãn công thức xác suất đầy đủ.

Công thức xác suất Bayes

Công thức

Nếu nhóm các biến cố A_1, \dots, A_n là đầy đủ, B là biến cố xảy ra đồng thời với chỉ một trong các $A_j, j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó,

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B | A_j)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B | A_j)}.$$

- B và các A_j được sinh ra trong cùng một phép thử, thỏa mãn công thức xác suất đầy đủ.
- Xác suất $P(A_j | B) > 0, j = 1, 2, \dots, n$, được gọi là **xác suất hậu nghiệm**.

Các ví dụ

Ví dụ 3

Hộp thứ nhất có 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh. Xác suất lựa chọn các hộp lần lượt là $1/3$ và $2/3$. Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ra một viên bi đỏ. Tính xác suất viên bi đỏ đó được lấy từ hộp thứ hai.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.
- Dễ thấy, A_1 và A_2 tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3$.

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.
- Dễ thấy, A_1 và A_2 tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3$.
- Gọi B là biến cố chọn được viên bi đỏ. Ta có,
 $P(B | A_1) = 2/5, P(B | A_2) = 1/3$

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.
- Dễ thấy, A_1 và A_2 tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3$.
- Gọi B là biến cố chọn được viên bi đỏ. Ta có,
 $P(B | A_1) = 2/5, P(B | A_2) = 1/3$
- Theo công thức xác suất đầy đủ,

$$P(B) = P(A_1).P(B | A_1) + P(A_2).P(B | A_2) = 16/45.$$

Lời giải

- Gọi $A_j, j = 1, 2$ là các biến cố chọn hộp thứ nhất và thứ hai.
- Dễ thấy, A_1 và A_2 tạo thành một nhóm đầy đủ các biến cố, và $P(A_1) = 1/3, P(A_2) = 2/3$.
- Gọi B là biến cố chọn được viên bi đỏ. Ta có,
 $P(B | A_1) = 2/5, P(B | A_2) = 1/3$
- Theo công thức xác suất đầy đủ,

$$P(B) = P(A_1).P(B | A_1) + P(A_2).P(B | A_2) = 16/45.$$

- Khi đó, theo công thức Bayes

$$P(A_2 | B) = 5/8$$

Các biến cố độc lập

Định nghĩa 1

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập, nếu

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Định nghĩa tương đương

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập, nếu

$$P(A | B) = P(A)$$

Các biến cố độc lập

Ví dụ 1

Gieo đồng thời một đồng xu và một con xúc sắc cân đối đồng chất. Hai biến cố "đồng xu sấp" và "mặt lục xuất hiện" của con xúc sắc là độc lập.

- Gọi A là biến cố đồng xu xuất hiện mặt sấp. $P(A) = 1/2$

Các biến cố độc lập

Ví dụ 1

Gieo đồng thời một đồng xu và một con xúc sắc cân đối đồng chất. Hai biến cố "đồng xu sấp" và "mặt lục xuất hiện" của con xúc sắc là độc lập.

- Gọi A là biến cố đồng xu xuất hiện mặt sấp. $P(A) = 1/2$
- Gọi B là biến cố con xúc sắc xuất hiện mặt lục. $P(B) = 1/6$.

Các biến cố độc lập

Ví dụ 1

Gieo đồng thời một đồng xu và một con xúc sắc cân đối đồng chất. Hai biến cố "đồng xu sấp" và "mặt lục xuất hiện" của con xúc sắc là độc lập.

- Gọi A là biến cố đồng xu xuất hiện mặt sấp. $P(A) = 1/2$
- Gọi B là biến cố con xúc sắc xuất hiện mặt lục. $P(B) = 1/6$.
- Khi đó, $P(A \cap B) = 1/12 = P(A).P(B)$

Các biến cố độc lập

Ví dụ 1

Gieo đồng thời một đồng xu và một con xúc sắc cân đối đồng chất. Hai biến cố "đồng xu sấp" và "mặt lục xuất hiện" của con xúc sắc là độc lập.

- Gọi A là biến cố đồng xu xuất hiện mặt sấp. $P(A) = 1/2$
- Gọi B là biến cố con xúc sắc xuất hiện mặt lục. $P(B) = 1/6$.
- Khi đó, $P(A \cap B) = 1/12 = P(A).P(B)$
- A và B là hai biến cố độc lập

Các biến cố độc lập

Định nghĩa 2

Các biến cố A_1, A_2, \dots được gọi là độc lập đôi một, nếu

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), i \neq j; i, j = 1, 2, \dots$$

Định nghĩa 3

Các biến cố A_1, A_2, \dots được gọi là độc lập toàn bộ (gọi tắt: độc lập), nếu

$$P\left(\bigcap_j^n A_j\right) = \prod_j^n P(A_j)$$

Các biến cố độc lập

Ví dụ 2 (phản ví dụ Bernstein)

Gieo một khối tứ diện đều có mặt thứ nhất sơn màu đỏ (D), mặt thứ hai sơn màu xanh (X), mặt thứ ba sơn màu vàng (V), mặt thứ tư sơn cả ba màu đỏ, xanh, vàng.

- Ta có $P(D) = P(X) = P(V) = 2/4 = 1/2$

Các biến cố độc lập

Ví dụ 2 (phản ví dụ Bernstein)

Gieo một khối tứ diện đều có mặt thứ nhất sơn màu đỏ (D), mặt thứ hai sơn màu xanh (X), mặt thứ ba sơn màu vàng (V), mặt thứ tư sơn cả ba màu đỏ, xanh, vàng.

- Ta có $P(D) = P(X) = P(V) = 2/4 = 1/2$
- Hơn nữa, $P(D \cap V) = P(V \cap X) = P(X \cap D) = 1/4$

Các biến cố độc lập

Ví dụ 2 (phản ví dụ Bernstein)

Gieo một khối tứ diện đều có mặt thứ nhất sơn màu đỏ (D), mặt thứ hai sơn màu xanh (X), mặt thứ ba sơn màu vàng (V), mặt thứ tư sơn cả ba màu đỏ, xanh, vàng.

- Ta có $P(D) = P(X) = P(V) = 2/4 = 1/2$
- Hơn nữa, $P(D \cap V) = P(V \cap X) = P(X \cap D) = 1/4$
- Khi đó, các biến cố D, X, V là độc lập đôi một.

Các biến cố độc lập

Ví dụ 2 (phản ví dụ Bernstein)

Gieo một khối tứ diện đều có mặt thứ nhất sơn màu đỏ (D), mặt thứ hai sơn màu xanh (X), mặt thứ ba sơn màu vàng (V), mặt thứ tư sơn cả ba màu đỏ, xanh, vàng.

- Ta có $P(D) = P(X) = P(V) = 2/4 = 1/2$
- Hơn nữa, $P(D \cap V) = P(V \cap X) = (X \cap D) = 1/4$
- Khi đó, các biến cố D, X, V là độc lập đôi một.
- Nhưng không phải độc lập toàn bộ vì
$$P(D \cap X \cap V) = 1/4 \neq P(D).P(X).P(V) = 1/8$$

Các tính chất

- 1 Các mệnh đề sau là tương đương

Các tính chất

- ① Các mệnh đề sau là tương đương
 - ① A và B độc lập

Các tính chất

- ❶ Các mệnh đề sau là tương đương
 - ❶ A và B độc lập
 - ❷ \overline{A} và B độc lập

Các tính chất

① Các mệnh đề sau là tương đương

- ① A và B độc lập
- ② \overline{A} và B độc lập
- ③ A và \overline{B} độc lập

Các tính chất

① Các mệnh đề sau là tương đương

- ① A và B độc lập
- ② \overline{A} và B độc lập
- ③ A và \overline{B} độc lập
- ④ \overline{A} và \overline{B} độc lập

Các tính chất

① Các mệnh đề sau là tương đương

- ① A và B độc lập
- ② \overline{A} và B độc lập
- ③ A và \overline{B} độc lập
- ④ \overline{A} và \overline{B} độc lập

② Nếu các A_1, \dots, A_n độc lập toàn bộ, thì chúng độc lập đôi một.

Các tính chất

- ❶ Các mệnh đề sau là tương đương
 - ❶ A và B độc lập
 - ❷ \overline{A} và B độc lập
 - ❸ A và \overline{B} độc lập
 - ❹ \overline{A} và \overline{B} độc lập
- ❷ Nếu các A_1, \dots, A_n độc lập toàn bộ, thì chúng độc lập đôi một.
- ❸ Độc lập đôi một không suy ra độc lập toàn bộ (xem ví dụ 2).

Dãy phép thử Bernoulli

Dãy n phép thử ngẫu nhiên được gọi là dãy Bernoulli, nếu

- ① n phép thử độc lập (các biến cố sinh ra từ chúng là độc lập)

Dãy phép thử Bernoulli

Dãy n phép thử ngẫu nhiên được gọi là dãy Bernoulli, nếu

- ① n phép thử độc lập (các biến cố sinh ra từ chúng là độc lập)
- ② n phép thử lặp (được thực hiện trong những điều kiện như nhau)

Dãy phép thử Bernoulli

Dãy n phép thử ngẫu nhiên được gọi là dãy Bernoulli, nếu

- ① n phép thử độc lập (các biến cố sinh ra từ chúng là độc lập)
- ② n phép thử lặp (được thực hiện trong những điều kiện như nhau)
- ③ trong mỗi phép thử chỉ xuất hiện một trong hai biến cố đối lập A và \bar{A} , với xác suất $p = P(A)$, $q = 1 - p = P(\bar{A})$.

Ví dụ về dãy phép thử Bernoulli

- Ví dụ 1. Gieo một đồng xu 1200 lần. A là biến cố xuất hiện "Sấp" với $p = P(A) = 1/2$.

Ví dụ về dãy phép thử Bernoulli

- Ví dụ 1. Gieo một đồng xu 1200 lần. A là biến cố xuất hiện "Sấp" với $p = P(A) = 1/2$.
- Ví dụ 2. Gieo 1200 đồng xu khác nhau không phải là một dãy 1200 phép thử Bernoulli.

Công thức Bernoulli

Bài toán Bernoulli

Tiến hành n phép thử Bernoulli, với xác suất "thành công" (xuất hiện biến cố A) là $p, p \in (0, 1)$. Tính xác suất có đúng k phép thử thành công, $0 \leq k \leq n$.

- Ví dụ 1. Xác suất một chai bia bị vỡ khi vận chuyển từ nơi sản xuất tới nơi tiêu thụ là 0.001. Tính xác suất để khi vận chuyển 15.000 chai bia có đúng 5 chai bị vỡ.

Công thức Bernoulli

Bài toán Bernoulli

Tiến hành n phép thử Bernoulli, với xác suất "thành công" (xuất hiện biến cố A) là $p, p \in (0, 1)$. Tính xác suất có đúng k phép thử thành công, $0 \leq k \leq n$.

- Ví dụ 1. Xác suất một chai bia bị vỡ khi vận chuyển từ nơi sản xuất tới nơi tiêu thụ là 0.001. Tính xác suất để khi vận chuyển 15.000 chai bia có đúng 5 chai bị vỡ.
- Ví dụ 2. Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất 600 lần. Tính xác suất để mặt "lục" xuất hiện đúng 100 lần.

2.9 Công thức Bernoulli

Công thức Bernoulli, 1713

$$P_n(k, p) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, n \geq 1, 0 \leq k \leq n, p \in (0, 1)$$

và

Công thức Bernoulli mở rộng

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2, p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, n \geq 1, 0 \leq k_1 \leq k \leq k_2 \leq n, p \in (0, 1)$$

Các ví dụ

Ví dụ 1

Xác suất một chai bia bị vỡ khi vận chuyển từ nơi sản xuất tới nơi tiêu thụ là 0.001. Tính xác suất để khi vận chuyển 15.000 chai bia có đúng 5 chai bị vỡ.

- Theo công thức Bernoulli, ta có

$$P_{15000}(5, 0.001) = C_{15000}^5 (0.001)^5 (1 - 0.001)^{15000-5} = 0.001929663$$

Các ví dụ

Ví dụ 1

Xác suất một chai bia bị vỡ khi vận chuyển từ nơi sản xuất tới nơi tiêu thụ là 0.001. Tính xác suất để khi vận chuyển 15.000 chai bia có đúng 5 chai bị vỡ.

- Theo công thức Bernoulli, ta có

$$P_{15000}(5, 0.001) = C_{15000}^5 (0.001)^5 (1 - 0.001)^{15000-5} = 0.001929663$$

- Có thể tính bằng công thức xấp xỉ Poisson (xem chương 4 Các định lý giới hạn của Lý thuyết xác suất)

Các ví dụ

Ví dụ 2

Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất 600 lần. Tính xác suất để mặt "lục" xuất hiện trong khoảng từ 50 tới 100 lần.

- Theo công thức Bernoulli mở rộng, ta có

$$P_{600}(50; 100, 1/6) = \sum_{k=50}^{100} C_{600}^k (1/6)^5 (1 - 1/6)^{600-k}$$

Các ví dụ

Ví dụ 2

Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất 600 lần. Tính xác suất để mặt "lục" xuất hiện trong khoảng từ 50 tới 100 lần.

- Theo công thức Bernoulli mở rộng, ta có

$$P_{600}(50; 100, 1/6) = \sum_{k=50}^{100} C_{600}^k (1/6)^5 (1 - 1/6)^{600-k}$$

- Có thể tính bằng công thức xấp xỉ de Moivre - Laplace (xem phần các định lý giới hạn)

Số có khả năng nhất

Định nghĩa

Số có khả năng nhất, ký hiệu k_0 , là số phép thử thành công mà xác suất tương ứng lớn nhất,

$$P_n(k_0, p) = \max P_n(k, p)$$

- Nếu $(n+1)p$ là một số nguyên, thì k_0 có hai giá trị $k_0 = (n+1)p$ và $k_0 = (n+1)p - 1$.

Số có khả năng nhất

Định nghĩa

Số có khả năng nhất, ký hiệu k_0 , là số phép thử thành công mà xác suất tương ứng lớn nhất,

$$P_n(k_0, p) = \max P_n(k, p)$$

- Nếu $(n+1)p$ là một số nguyên, thì k_0 có hai giá trị $k_0 = (n+1)p$ và $k_0 = (n+1)p - 1$.
- Nếu $(n+1)p$ không là một số nguyên, thì $k_0 = [(n+1)p]$.

Số có khả năng nhất

Định nghĩa

Số có khả năng nhất, ký hiệu k_0 , là số phép thử thành công mà xác suất tương ứng lớn nhất,

$$P_n(k_0, p) = \max P_n(k, p)$$

- Nếu $(n+1)p$ là một số nguyên, thì k_0 có hai giá trị $k_0 = (n+1)p$ và $k_0 = (n+1)p - 1$.
- Nếu $(n+1)p$ không là một số nguyên, thì $k_0 = [(n+1)p]$.
- Chú ý: $[x]$ là phần nguyên của số x .

Các ví dụ

Ví dụ 3

Thực hiện 15 phép thử Bernoulli có xác suất thành công của một phép thử là 0.75. Tính số có khả năng nhất. Tính xác suất tương ứng.

- Do $(n + 1)p = (15 + 1) \cdot 0.75 = 12$, nên số có khả năng nhất có 2 giá trị, $k_0 = 12$ và $k_0 = 11$.

Các ví dụ

Ví dụ 3

Thực hiện 15 phép thử Bernoulli có xác suất thành công của một phép thử là 0.75. Tính số có khả năng nhất. Tính xác suất tương ứng.

- Do $(n + 1)p = (15 + 1).0.75 = 12$, nên số có khả năng nhất có 2 giá trị, $k_0 = 12$ và $k_0 = 11$.
- Khi đó, xác suất tương ứng

$$P_{15}(11, 0.75) = C_{15}^{11}(0.75)^{11}(1 - 0.75)^{15-11} = 0.2251991$$

Các ví dụ

Ví dụ 4

Thực hiện 25 lần gieo một đồng xu có xác suất xuất hiện mặt sấp là 0.51. Tính số mặt sấp có khả năng nhất. Tính xác suất tương ứng.

- Do $(n + 1)p = (25 + 1) \cdot 0.51 = 13.26$, nên số có khả năng nhất là, $k_0 = [13.26] = 13$

Các ví dụ

Ví dụ 4

Thực hiện 25 lần gieo một đồng xu có xác suất xuất hiện mặt sấp là 0.51. Tính số mặt sấp có khả năng nhất. Tính xác suất tương ứng.

- Do $(n + 1)p = (25 + 1).0.51 = 13.26$, nên số có khả năng nhất là, $k_0 = [13.26] = 13$
- Khi đó, xác suất tương ứng
$$P_{25}(13, 0.51) = C_{25}^{13}(0.51)^{13}(1 - 0.51)^{25-13} = 0.1573235$$

Bài tập chương 2

1. Hộp thứ nhất có 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 1 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi. Sau đó chọn ngẫu nhiên 1 viên bi từ hai viên bi vừa lấy ra từ hai hộp. Tính xác suất để viên bi được chọn là bi đỏ.
2. Hộp thứ nhất có 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Từ hộp thứ nhất lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi bỏ qua hộp thứ hai. Sau đó chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu.
3. Một hộp có 5 bi xanh và 10 bi đỏ. Thực hiện 9 lần lấy ra một viên bi để xác định màu. Tính xác suất có 5 lần lấy được bi đỏ. Tìm số bi đỏ có khả năng nhất.

Bài tập chương 2

4. Hộp thứ nhất có 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 1 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi. Sau đó chọn ngẫu nhiên 1 viên bi từ hai viên bi vừa lấy ra từ hai hộp. Tính xác suất để viên bi được chọn là bi đỏ
5. Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Từ hộp thứ nhất lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi bỏ qua hộp thứ hai. Sau đó chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu.
6. Một hộp có 5 bi xanh và 10 bi đỏ. Thực hiện 9 lần lấy ra (có hoàn lại) một viên bi để xác định màu.
- 1 Tính xác suất có 5 lần lấy được bi đỏ.
 - 2 Tìm số bi đỏ có khả năng nhất.

Bài tập chương 2

7. Hộp thứ nhất có 2 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Hộp thứ hai có 1 sản phẩm loại A và 4 sản phẩm loại B. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai ra 2 sản phẩm.

- ① Tính xác suất để hai sản phẩm lấy ra có 1 sản phẩm loại A và 1 sản phẩm loại B.
- ② Tính xác suất để hai sản phẩm lấy ra là hai sản phẩm loại A.
- ③ Tính xác suất để có ít nhất một sản phẩm loại B.

8. Gieo 25 hạt giống có xác suất nảy mầm là 0.75.

- ① Tính xác suất để có 15 hạt nảy mầm.
- ② Số hạt giống có khả năng nảy mầm nhất là bao nhiêu? Tính xác suất tương ứng.
- ③ Phải gieo bao nhiêu hạt giống loại đó để xác suất có ít nhất một hạt nảy mầm không bé hơn 0.999

9. Có 2 chuồng thỏ thí nghiệm, chuồng thứ nhất có 2 thỏ trắng và 3 thỏ nâu. Chuồng thứ hai có 1 thỏ trắng và 2 thỏ nâu. Tình cờ, 2 con thỏ từ

Bài tập chương 2

10. Một bộ bài 52 quân bỏ đi 2 quân bài một cách ngẫu nhiên và chia đều cho 5 người chơi. Tính xác suất một người chơi được chia 2 quân át.

11. Một người có 3 chỗ câu cá với xác suất để một lần thả câu sẽ câu được một con cá ở mỗi chỗ lần lượt là 0.8, 0.7 và 0.9. Người đó chọn ngẫu nhiên một chỗ để câu bằng cách gieo ngẫu nhiên 2 đồng xu cân đối và đồng chất. Nếu 2 đồng xu sấp thì chọn chỗ câu thứ nhất. Nếu hai đồng xu ngửa thì chọn chỗ câu thứ hai. Trường hợp còn lại người đó sẽ chọn chỗ câu thứ ba.

- ① Nếu chọn được một chỗ để câu, tính xác suất để sau một lần thả câu người đó câu được một con cá.
- ② Tại một chỗ câu đã chọn, người đó thả câu 3 lần thì câu được một con cá. Hỏi khả năng người đó đã câu ở địa điểm nào?

12. Có 3 người A, B và C lần lượt bắt 3 lá thăm trong đó có 2 lá thăm tốt và 1 lá thăm không tốt. Hỏi khả năng bắt được lá thăm tốt của A, B và C có như nhau không? Tại sao?

Bài tập chương 2

13. Phải gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất bao nhiêu lần để xác suất có ít nhất một lần mặt "lục" xuất hiện lớn hơn $\frac{1}{2}$

14. Giả sử tỷ lệ làm ra chính phẩm của một máy là 99%. Hỏi phải làm ra bao nhiêu sản phẩm để xác suất máy đó làm ra ít nhất một chính phẩm là 95%

15. Xác suất để thời tiết thuận lợi cho giống lúa A là 0.9. Nếu thời tiết thuận lợi thì xác suất để giống lúa A đạt năng suất cao là 0.85. Nếu thời tiết không thuận lợi thì với xác suất 0.2 giống lúa A sẽ đạt năng suất cao.

- ① Tính xác suất để giống lúa A đạt năng suất cao.
- ② Giả sử giống lúa A không đạt năng suất, hãy tính xác suất để thời tiết không thuận lợi cho giống lúa A.

Bài tập chương 2

16. Ba bức điện được truyền theo một kênh thông tin với mức độ chính xác khác nhau. Cụ thể mỗi bức điện đều có một trong ba khả năng sau:

- ① A_1 : bức điện được truyền đúng
- ② A_2 : bức điện được truyền sai lệch một phần
- ③ A_3 : bức điện được truyền sai lệch hoàn toàn

với xác suất p_1, p_2 và p_3 mà $p_j \in (0, 1), p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Giả sử các bức điện được truyền đúng hay sai lệch là độc lập với nhau. Hãy tính các xác suất

- ① Cả ba bức điện đều được truyền đúng
- ② Có ít nhất một bức điện bị truyền sai lệch hoàn toàn

17. Hai chuồng gà nằm cạnh nhau. Chuồng thứ nhất có 18 gà mái và 2 gà trống, chuồng thứ hai có 15 gà mái và 5 gà trống. Bất ngờ hai con gà từ chuồng thứ hai nhảy sang chuồng thứ nhất. Người ta bắt ngẫu nhiên 2 con gà từ chuồng thứ nhất bỏ vào lại chuồng thứ hai.

- ① Tính xác suất bắt được hai con gà trống.
- ② Tính xác suất để bắt được một gà trống và một gà mái

Bài tập chương 2

18. Tại một nhà máy sản xuất bóng đèn điện tử xác suất làm ra một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0.8. Trước khi xuất xưởng các bóng đèn cần phải đóng dấu kiểm tra chất lượng. Vì kiểm tra không chặt nên mỗi bóng đèn đạt tiêu chuẩn có xác suất được đóng dấu là 0.9 còn mỗi bóng không đạt tiêu chuẩn có xác suất được đóng dấu là 0.05

- ① Chọn ngẫu nhiên một bóng đèn. Tính xác suất bóng đèn đó được đóng dấu kiểm tra chất lượng.
- ② Giả sử chọn được một bóng đã có đóng dấu kiểm tra chất lượng. Tính xác suất để bóng đèn đó là loại bóng đèn đạt tiêu chuẩn.

19. Một ca thợ gồm 3 công nhân sản xuất cùng một loại sản phẩm với số sản phẩm làm ra tỷ lệ với 3:4:5 và với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 2%: 2,5%: 3%. Chọn ngẫu nhiên ra một sản phẩm do ca thợ đó sản xuất.

- ① Tìm xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm.
- ② Nếu kiểm tra thấy đó là phế phẩm, hãy tính xác suất để phế phẩm đó do công nhân thứ i sản xuất ra ($i=1,2,3$).

Bài tập chương 2

20. Xác suất để một xạ thủ bắn trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,4. Tính xác suất mục tiêu bị tiêu diệt sau 3 lần bắn độc lập, biết rằng xác suất mục tiêu bị tiêu diệt khi trúng 1, 2, 3 phát lần lượt là 0,2; 0,5; 0,8.

21. Từ một lô hàng có 5 sản phẩm loại I và 2 sản phẩm loại II. Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ lô hàng đó ra 3 sản phẩm.

① Tìm xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II.

② Tìm xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất 1 sản phẩm loại I.

22. Một em bé có trong túi trái 5 bi đỏ và 4 bi xanh, trong túi phải có 6 bi đỏ và 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ túi trái bỏ qua túi phải, rồi lại lấy ngẫu nhiên từ túi phải ra hai viên bi.

① Tìm xác suất để 2 viên bi lấy ra lần sau là hai bi đỏ.

② Tìm xác suất để 2 viên bi lấy ra lần sau là 2 bi cùng màu.

③ Tìm xác suất để 2 viên bi lấy ra lần sau là 2 bi khác màu.

Bài tập chương 2

23. Có 2 lô sản phẩm. Lô 1 có 8 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II, lô 2 có 15 sản phẩm loại I và 5 sản phẩm loại II. Từ mỗi lô lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Sau đó lại lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm từ 2 sản phẩm vừa lấy ra trước. Tìm khả năng để sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm loại I.

24. Xác suất để một xạ thủ bắn trúng bia là 0,95. Hỏi xạ thủ này phải bắn ít nhất bao nhiêu viên để với xác suất không bé hơn 0,99 xạ thủ này bắn trúng bia ít nhất 1 viên.

25. Một máy sản xuất các chi tiết điện tử với xác suất phế phẩm là 0.015.

- ① Hãy tính xác suất để sản xuất 300 chi tiết điện tử, phát hiện ra 5 phế phẩm
- ② Tính số phế phẩm có khả năng nhất
- ③ Phải sản xuất bao nhiêu chi tiết điện tử loại đó để xác suất có ít nhất một chi tiết không bị hỏng không bé hơn 0.9999