

Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học

PGS.TS. Trần Lộc Hùng

Tp. Hồ Chí Minh - 2013

Ngày 15 tháng 9 năm 2013

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH-MARKETING
KHOA CƠ BẢN, BỘ MÔN TOÁN-THỐNG KÊ

PGS. TS. TRẦN LỘC HÙNG

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN HỌC

Tp. Hồ Chí Minh - 2013

Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học

PGS.TS. Trần Lộc Hùng

Tp. Hồ Chí Minh - 2013

Ngày 15 tháng 9 năm 2013

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

Từ khóa (Key Words)

- Biến ngẫu nhiên

Từ khóa (Key Words)

- Biến ngẫu nhiên
- Hàm phân phối xác suất

Từ khóa (Key Words)

- Biến ngẫu nhiên
- Hàm phân phối xác suất
- Hàm mật độ xác suất

Từ khóa (Key Words)

- Biến ngẫu nhiên
- Hàm phân phối xác suất
- Hàm mật độ xác suất
- Kỳ vọng

Từ khóa (Key Words)

- Biến ngẫu nhiên
- Hàm phân phối xác suất
- Hàm mật độ xác suất
- Kỳ vọng
- Phương sai

Từ khóa (Key Words)

- Biến ngẫu nhiên
- Hàm phân phối xác suất
- Hàm mật độ xác suất
- Kỳ vọng
- Phương sai
- Mô men, hệ số bất đối xứng, hệ số nhọn (đọc thêm)

Từ khóa (Key Words)

- Biến ngẫu nhiên
- Hàm phân phối xác suất
- Hàm mật độ xác suất
- Kỳ vọng
- Phương sai
- Mô men, hệ số bất đối xứng, hệ số nhọn (đọc thêm)
- Véc tơ ngẫu nhiên

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

① Khái niệm và định nghĩa

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

- ① Khái niệm và định nghĩa
- ② Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

- 1 Khái niệm và định nghĩa
- 2 Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối
- 3 Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

- 1 Khái niệm và định nghĩa
- 2 Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối
- 3 Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất
- 4 Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

- 1 Khái niệm và định nghĩa
- 2 Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối
- 3 Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất
- 4 Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất
- 5 Các phân phối xác suất

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

- 1 Khái niệm và định nghĩa
- 2 Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối
- 3 Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất
- 4 Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất
- 5 Các phân phối xác suất
- 6 Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

- 1 Khái niệm và định nghĩa
- 2 Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối
- 3 Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất
- 4 Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất
- 5 Các phân phối xác suất
- 6 Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên
- 7 Biến ngẫu nhiên hai chiều và các đặc trưng

Chương 3. Biến ngẫu nhiên và các đặc trưng

- 1 Khái niệm và định nghĩa
- 2 Biến ngẫu nhiên và hàm phân phối
- 3 Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất
- 4 Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất
- 5 Các phân phối xác suất
- 6 Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên
- 7 Biến ngẫu nhiên hai chiều và các đặc trưng
- 8 Bài tập

Khái niệm và định nghĩa

Ví dụ 1

Gieo hai đồng tiền cân đối và đồng chất. Xác định số lần sấp xảy ra và

Ví dụ 2

Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất cho tới khi nào sấp thì ngừng. Xác định số lần gieo phải thực hiện

- Gọi X là số lần sấp trong ví dụ 1. X nhận các giá trị 0, 1 và 2

Khái niệm và định nghĩa

Ví dụ 1

Gieo hai đồng tiền cân đối và đồng chất. Xác định số lần sắp xảy ra
và

Ví dụ 2

Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất cho tới khi nào sắp thì ngừng.
Xác định số lần gieo phải thực hiện

- Gọi X là số lần sắp trong ví dụ 1. X nhận các giá trị 0, 1 và 2
- Gọi Y là số lần phải gieo đồng tiền. Y nhận các giá trị 1, 2, ...

Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Giả sử Ω là không gian các biến cố sơ cấp sinh ra từ một phép thử ngẫu nhiên, \mathfrak{R} là tập các số thực. Khi đó, ánh xạ $X : \Omega \mapsto \mathfrak{R}$ được gọi là biến ngẫu nhiên, nếu tập hợp $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{B}, x \in \mathfrak{R}$, là một biến cố ngẫu nhiên.

- Không gian Ω có thể vô hạn, hữu hạn.

Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Giả sử Ω là không gian các biến cố sơ cấp sinh ra từ một phép thử ngẫu nhiên, \mathfrak{R} là tập các số thực. Khi đó, ánh xạ $X : \Omega \mapsto \mathfrak{R}$ được gọi là biến ngẫu nhiên, nếu tập hợp $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{B}, x \in \mathfrak{R}$, là một biến cố ngẫu nhiên.

- Không gian Ω có thể vô hạn, hữu hạn.
- Biến X nhận giá trị phụ thuộc vào các kết cục xảy ra của phép thử

Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Giả sử Ω là không gian các biến cố sơ cấp sinh ra từ một phép thử ngẫu nhiên, \mathfrak{R} là tập các số thực. Khi đó, ánh xạ $X : \Omega \mapsto \mathfrak{R}$ được gọi là biến ngẫu nhiên, nếu tập hợp $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{B}, x \in \mathfrak{R}$, là một biến cố ngẫu nhiên.

- Không gian Ω có thể vô hạn, hữu hạn.
- Biến X nhận giá trị phụ thuộc vào các kết cục xảy ra của phép thử
- Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên, thì $X + Y, X - Y, X.Y, X/Y, \cos(X), \sin(X), \dots$ là các biến ngẫu nhiên

Hàm phân phối xác suất

Định nghĩa

$$F_X(x) = P(X < x), x \in \mathbb{R}$$

- Còn được gọi là hàm phân phối tích lũy

Hàm phân phối xác suất

Định nghĩa

$$F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

- Còn được gọi là hàm phân phối tích lũy
- Có thể dùng định nghĩa $F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$

1. Hàm không giảm

Nếu $x_1 < x_2$, thì $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

2. Nhận giá trị trong $[0,1]$

$$0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in \mathfrak{R}$$

3. Nhận giá trị ở vô cùng

$$F_X(-\infty) = 0; \quad F_X(+\infty) = 1$$

4. Liên tục trái

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x) = F_X(a)$$

5. Xác suất X nhận giá trị trong nửa khoảng

$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X là rời rạc nếu tập giá trị có thể của nó hữu hạn hay vô hạn đếm được $\{x_1, x_2, \dots\}$

- Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 1 là rời rạc (có hữu hạn giá trị)

Biến ngẫu nhiên rời rạc và hàm xác suất

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X là rời rạc nếu tập giá trị có thể của nó hữu hạn hay vô hạn đếm được $\{x_1, x_2, \dots\}$

- Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 1 là rời rạc (có hữu hạn giá trị)
- Biến ngẫu nhiên Y trong ví dụ 2 là rời rạc (có đếm được giá trị)

Hàm xác suất

Định nghĩa

Giả sử X rời rạc. Hàm xác suất p là một hàm từ \mathfrak{R} vào \mathfrak{R} sao cho

- ① $p(x) = 0$ nếu $x \notin \{x_1, x_2, \dots\}$
- ② $p(x_j) \geq 0$
- ③ $p(x_j) = P(X = x_j)$
- ④ $\sum_{j=1}^{\infty} p(x_j) = 1$
- ⑤ $F_X(t) = P(X < t) = \sum_{j: x_j < t} p(x_j)$

Dãy phân phối xác suất

Định nghĩa

Giả sử X rời rạc nhận các giá trị $\{x_1, x_2, \dots\}$. Dãy số thực p_1, p_2, \dots là dãy phân phối xác suất của X , nếu

- ❶ $p_j \geq 0$
- ❷ $p_j = P(X = x_j)$
- ❸ $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$

Biến rời rạc

Ví dụ 3

Một hộp kín có 2 quả cầu trắng và 3 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu. Gọi X là số quả cầu trắng được lấy ra

- 1 Xác định biến ngẫu nhiên X .
- 2 Lập hàm phân phối xác suất $F_X(x)$

Lời giải

- 1 Biến X nhận các giá trị 0, 1 và 2.
- 2 Dãy phân phối xác suất của X :

$$p_0 = P(X = 0) = 0.3$$

$$p_1 = P(X = 1) = 0.6$$

$$p_2 = P(X = 3) = 0.1$$

- 3 Hàm phân phối xác suất $F_X(x)$

Biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên X là liên tục, nếu tồn tại hàm không âm $f_X(x) \geq 0, x \in \mathfrak{R}$ sao cho

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

Hàm $f_X(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất tương ứng với biến ngẫu nhiên X

Tính chất

1. Không âm

$$f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$$

2. Đầy đủ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

3. Nguyên hàm

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

4. Xác suất khoảng

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Biến ngẫu nhiên liên tục

Ví dụ 4

Hàm mật độ Laplace có dạng

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathfrak{R}$$

- 1 Kiểm tra các tính chất của hàm $\varphi(x)$
- 2 Lập hàm phân phối xác suất $\Phi(x)$
- 3 Vẽ đồ thị hàm mật độ và hàm phân phối xác suất Laplace

Lời giải

- Tính không âm: dễ thấy $\forall x \in \mathfrak{X}$, hàm $\varphi(x) \geq 0$. Đồ thị luôn nằm trên trục hoành $\overrightarrow{0x}$

Lời giải

- Tính không âm: dễ thấy $\forall x \in \mathfrak{R}$, hàm $\varphi(x) \geq 0$. Đồ thị luôn nằm trên trục hoành \overrightarrow{Ox}
- Tính đầy đủ: tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$$

Lưu ý tích phân Euler-Poisson:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Lời giải

- Khảo sát hàm Laplace

Lời giải

- Khảo sát hàm Laplace
 - ① Hàm không âm: $\varphi(x) \geq 0$

Lời giải

- Khảo sát hàm Laplace

- 1 Hàm không âm: $\varphi(x) \geq 0$
- 2 Hàm chẵn: $\varphi(-x) = \varphi(x)$

Lời giải

- Khảo sát hàm Laplace

- 1 Hàm không âm: $\varphi(x) \geq 0$
- 2 Hàm chẵn: $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- 3 Nhận trục \vec{Ox} làm tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$$

Lời giải

- Khảo sát hàm Laplace

- 1 Hàm không âm: $\varphi(x) \geq 0$
- 2 Hàm chẵn: $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- 3 Nhận trục \vec{Ox} làm tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$$

- Giá trị hàm Laplace được ghi bởi bảng Laplace ở các sách xác suất thống kê.

Lời giải

- Khảo sát hàm Laplace

- 1 Hàm không âm: $\varphi(x) \geq 0$
- 2 Hàm chẵn: $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- 3 Nhận trục \vec{Ox} làm tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$$

- Giá trị hàm Laplace được ghi bởi bảng Laplace ở các sách xác suất thống kê.
- Hàm phân phối xác suất Laplace:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng toán

Kỳ vọng toán của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu $E(X)$ hoặc $M(X)$, xác định bởi

- ① $E(X) = \sum_{j=1} x_j p_j$, với $p_j = P(X = x_j)$, nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc.
 - ② $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$, nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục với $f_X(x)$ là hàm mật độ
- Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 1 có kỳ vọng $E(X) = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4 = 1$

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng toán

Kỳ vọng toán của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu $E(X)$ hoặc $M(X)$, xác định bởi

- ① $E(X) = \sum_{j=1} x_j p_j$, với $p_j = P(X = x_j)$, nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc.
 - ② $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$, nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục với $f_X(x)$ là hàm mật độ
- Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 1 có kỳ vọng $E(X) = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4 = 1$
 - Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 4 có kỳ vọng $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$.

Tính chất

- 1 Nếu C là hằng số, thì $E(C) = C$.

Tính chất

- 1 Nếu C là hằng số, thì $E(C) = C$.
- 2 Nếu C là hằng số, thì $E(CX) = CE(X)$.

Tính chất

- 1 Nếu C là hằng số, thì $E(C) = C$.
- 2 Nếu C là hằng số, thì $E(CX) = CE(X)$.
- 3 Nếu C_1, C_2 là các hằng số, thì
$$E(C_1X_1 + C_2X_2) = C_1E(X_1) + C_2E(X_2).$$

Tính chất

- 1 Nếu C là hằng số, thì $E(C) = C$.
- 2 Nếu C là hằng số, thì $E(CX) = CE(X)$.
- 3 Nếu C_1, C_2 là các hằng số, thì
$$E(C_1X_1 + C_2X_2) = C_1E(X_1) + C_2E(X_2).$$
- 4 Nếu X_1, X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập, tức là các biến cố $(X_1 < t_1), (X_2 < t_2)$ độc lập, thì $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$.

Tính chất

- 1 Nếu C là hằng số, thì $E(C) = C$.
- 2 Nếu C là hằng số, thì $E(CX) = CE(X)$.
- 3 Nếu C_1, C_2 là các hằng số, thì
 $E(C_1X_1 + C_2X_2) = C_1E(X_1) + C_2E(X_2)$.
- 4 Nếu X_1, X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập, tức là các biến cố $(X_1 < t_1), (X_2 < t_2)$ độc lập, thì $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$.
- 5 Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục, với hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.
Giả sử g là một hàm thực. Khi đó,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Phương sai

Phương sai của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu σ^2 hoặc $D(X)$ hoặc $Var(X)$, xác định bởi

$$D(X) = E(|X - \mu|^2),$$

với $\mu = E(X)$.

- Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 1 có phương sai

$$D(X) = (0 - 1)^2 \times 1/4 + (1 - 1)^2 \times 1/2 + (2 - 1)^2 \times 1/4 = 1/2$$

- 1 $D(X) = \sum_{j=1} (x_j - \mu)^2 p_j$, với $p_j = P(X = x_j)$, nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc.
- 2 $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$, nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục với $f_X(x)$ là hàm mật độ

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Phương sai

Phương sai của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu σ^2 hoặc $D(X)$ hoặc $Var(X)$, xác định bởi

$$D(X) = E(|X - \mu|^2),$$

với $\mu = E(X)$.

- Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 1 có phương sai

$$D(X) = (0 - 1)^2 \times 1/4 + (1 - 1)^2 \times 1/2 + (2 - 1)^2 \times 1/4 = 1/2$$

- Biến ngẫu nhiên X trong ví dụ 4 có phương sai

$$D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

- 1 $D(X) = \sum_{j=1} (x_j - \mu)^2 p_j$, với $p_j = P(X = x_j)$, nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc.
- 2 $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$, nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục với $f_X(x)$ là hàm mật độ

Tính chất

- 1 Nếu C là hằng số, thì $D(C) = 0$.

Tính chất

- ① Nếu C là hằng số, thì $D(C) = 0$.
- ② Nếu C là hằng số, thì $D(CX) = C^2 D(X)$.

Tính chất

- ① Nếu C là hằng số, thì $D(C) = 0$.
- ② Nếu C là hằng số, thì $D(CX) = C^2 D(X)$.
- ③ $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Tính chất

- ❶ Nếu C là hằng số, thì $D(C) = 0$.
- ❷ Nếu C là hằng số, thì $D(CX) = C^2 D(X)$.
- ❸ $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- ❹ Nếu X_1, X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập, tức là các biến cố $(X_1 < t_1), (X_2 < t_2)$ độc lập, thì $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$.

Tính chất

- ❶ Nếu C là hằng số, thì $D(C) = 0$.
- ❷ Nếu C là hằng số, thì $D(CX) = C^2 D(X)$.
- ❸ $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- ❹ Nếu X_1, X_2 là các biến ngẫu nhiên độc lập, tức là các biến cố $(X_1 < t_1), (X_2 < t_2)$ độc lập, thì $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$.
- ❺ Độ lệch tiêu chuẩn của X , $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Các mô men của biến ngẫu nhiên (đọc thêm)

Mô men gốc bậc k

Mô men gốc bậc k của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu m_k , xác định bởi

$$m_k = E(X^k)$$

Mô men trung tâm bậc k

Mô men trung tâm bậc k của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu μ_k , xác định bởi

$$\mu_k = E(X - \mu)^k$$

- Dễ thấy, $m_1 = E(X) = \mu$.

Các mô men của biến ngẫu nhiên (đọc thêm)

Mô men gốc bậc k

Mô men gốc bậc k của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu m_k , xác định bởi

$$m_k = E(X^k)$$

Mô men trung tâm bậc k

Mô men trung tâm bậc k của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu μ_k , xác định bởi

$$\mu_k = E(X - \mu)^k$$

- Dễ thấy, $m_1 = E(X) = \mu$.
- Rõ ràng, $\mu_1 = 0$.

Median (Trung vị) của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Median của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu Med_X , xác định bởi

$$F_X(Med_X) = \frac{1}{2}$$

- Median luôn tồn tại và không duy nhất.

Median (Trung vị) của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Median của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu Med_X , xác định bởi

$$F_X(Med_X) = \frac{1}{2}$$

- Median luôn tồn tại và không duy nhất.
- Median thỏa mãn điều kiện

$$P(X < Med) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq Med_X)$$

Median (Trung vị) của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Median của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu Med_X , xác định bởi

$$F_X(Med_X) = \frac{1}{2}$$

- Median luôn tồn tại và không duy nhất.
- Median thỏa mãn điều kiện

$$P(X < Med) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq Med_X)$$

- Do $E(|X - a|)$ đạt cực tiểu khi $a = Med_X$, nên nếu không tồn tại kỳ vọng μ thường dùng median.

Mod (số trội) của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Mod của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu Mod_X , là giá trị của biến X để hàm mật độ đạt giá trị cực đại

$$f_X(Mod_X) = \max f_X(x)$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên đối xứng, $F_X(x) = F_{-X}(x)$, thì $E(X) = Med = Mod$.

Mod (số trội) của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Mod của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu Mod_X , là giá trị của biến X để hàm mật độ đạt giá trị cực đại

$$f_X(Mod_X) = \max f_X(x)$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên đối xứng, $F_X(x) = F_{-X}(x)$, thì $E(X) = Med = Mod$.
- Ví dụ với biến X có hàm mật độ Laplace, thì $E(X) = Med = Mod = 0$.

Mod (số trội) của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Mod của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu Mod_X , là giá trị của biến X để hàm mật độ đạt giá trị cực đại

$$f_X(Mod_X) = \max f_X(x)$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên đối xứng, $F_X(x) = F_{-X}(x)$, thì $E(X) = Med = Mod$.
- Ví dụ với biến X có hàm mật độ Laplace, thì $E(X) = Med = Mod = 0$.
- Mod không duy nhất

Hệ số bất đối xứng của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- Mô men trung tâm bậc ba $\mu_3 = E(X - \mu)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 f_X(x) dx$ đặc trưng cho tính chất đối xứng của hàm phân phối.

Hệ số bất đối xứng của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- Mô men trung tâm bậc ba $\mu_3 = E(X - \mu)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 f_X(x) dx$ đặc trưng cho tính chất đối xứng của hàm phân phối.
- Nếu phân phối của biến ngẫu nhiên là đối xứng tại $E(X) = \mu$ thì $\mu_3 = 0$ (mọi mô men cấp lẻ đều bằng 0)

Hệ số bất đối xứng của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- Mô men trung tâm bậc ba $\mu_3 = E(X - \mu)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 f_X(x) dx$ đặc trưng cho tính chất đối xứng của hàm phân phối.
- Nếu phân phối của biến ngẫu nhiên là đối xứng tại $E(X) = \mu$ thì $\mu_3 = 0$ (mọi mô men cấp lẻ đều bằng 0)
- Nếu $\mu_3 > 0$ phân phối nặng về bên phải của kỳ vọng μ . Nếu $\mu_3 < 0$ thì phân phối nặng về bên trái của kỳ vọng μ .

Hệ số bất đối xứng của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- Mô men trung tâm bậc ba $\mu_3 = E(X - \mu)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 f_X(x) dx$ đặc trưng cho tính chất đối xứng của hàm phân phối.
- Nếu phân phối của biến ngẫu nhiên là đối xứng tại $E(X) = \mu$ thì $\mu_3 = 0$ (mọi mô men cấp lẻ đều bằng 0)
- Nếu $\mu_3 > 0$ phân phối nặng về bên phải của kỳ vọng μ . Nếu $\mu_3 < 0$ thì phân phối nặng về bên trái của kỳ vọng μ .
- σ là độ lệch tiêu chuẩn của X

Hệ số nhọn của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

- Mô men trung tâm bậc bốn

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^4 f_X(x) dx$$

đặc trưng cho độ nhọn của đường cong phân phối so với đường cong Laplace.

Hệ số nhọn của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

- Mô men trung tâm bậc bốn

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^4 f_X(x) dx$$

đặc trưng cho độ nhọn của đường cong phân phối so với đường cong Laplace.

- Với biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\gamma_2 = 0$.

Hệ số nhọn của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

- Mô men trung tâm bậc bốn

$$\mu_4 = E(X - \mu)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^4 f_X(x) dx$$

đặc trưng cho độ nhọn của đường cong phân phối so với đường cong Laplace.

- Với biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\gamma_2 = 0$.
- Nếu $\gamma_2 > 0$ đường cong phân phối sẽ nhọn hơn đường cong Laplace.
Nếu $\gamma_2 < 0$ đường cong phân phối sẽ tù hơn đường cong Laplace.

Hệ số tương quan

Định nghĩa

Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn tương ứng $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$. Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X và Y , xác định bởi

$$\rho(X, Y) = \frac{E(X - E(X))(Y - E(Y))}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- $|\rho(X, Y)| \leq 1$

Hệ số tương quan

Định nghĩa

Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn tương ứng $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$. Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X và Y , xác định bởi

$$\rho(X, Y) = \frac{E(X - E(X))(Y - E(Y))}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- $|\rho(X, Y)| \leq 1$
- Nếu X và Y độc lập, thì $\rho(X, Y) = 0$. Ngược lại, không đúng.

Hệ số tương quan

Định nghĩa

Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn tương ứng $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$. Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X và Y , xác định bởi

$$\rho(X, Y) = \frac{E(X - E(X))(Y - E(Y))}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- $|\rho(X, Y)| \leq 1$
- Nếu X và Y độc lập, thì $\rho(X, Y) = 0$. Ngược lại, không đúng.
- $|\rho(X, Y)| = 1$ khi và chỉ khi tồn tại $a \neq 0, b \in \mathfrak{R}$, sao cho $P(Y = aX + b) = 1$.

Biến ngẫu nhiên hai chiều

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên 2 chiều là một ánh xạ từ một không gian Ω vào không gian 2 chiều \mathfrak{R}^2

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^2$$

sao cho tập $\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) < (x, y)\}$ là biến cố ngẫu nhiên.

Biến ngẫu nhiên hai chiều

Ví dụ

Z chỉ sự phát triển của một đứa trẻ, trong đó X là chiều cao, Y là cân nặng. Như vậy,

$$Z = (X, Y)$$

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Hàm xác suất đồng thời

Hàm xác suất đồng thời của (X,Y) xác định bởi

$$p_{ij} = P_{(X,Y)}(X = x_i, Y = y_j)$$

Các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Hàm xác suất biên duyên

Hàm xác suất biên duyên của (X, Y) xác định bởi

- ① $P_X(X = x_i) = \sum_j P_{(X, Y)}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} = p_i$
- ② $P_Y(Y = y_j) = \sum_i P_{(X, Y)}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_j$

Lưu ý:

- $\sum_i p_i = \sum_j p_j = 1$

Các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Hàm xác suất biên duyên

Hàm xác suất biên duyên của (X, Y) xác định bởi

- ① $P_X(X = x_i) = \sum_j P_{(X, Y)}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} = p_i$
- ② $P_Y(Y = y_j) = \sum_i P_{(X, Y)}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_j$

Lưu ý:

- $\sum_i p_i = \sum_j p_j = 1$
- $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

Các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Hàm xác suất có điều kiện

Hàm xác suất có điều kiện xác định bởi

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{i|j}} = p_{i|j}$$

Lưu ý:

Tính đầy đủ

$$\sum_i p_{i|j} = \frac{1}{p_j} \sum_i p_{ij} = 1$$

Các biến ngẫu nhiên độc lập

Định nghĩa

Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập, nếu

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

hay

Định nghĩa tương đương

$$P(X = x_i | Y = y_j) = P(X = x_i)$$

Kỳ vọng có điều kiện

Định nghĩa

Kỳ vọng của Y với điều kiện $X = x_i$, xác định bởi

$$E(Y | X = x_i) = \sum_j y_j P(Y = y_j | X = x_i) = \sum_j y_j p_{i|j}$$

Hiệp phương sai

Định nghĩa

Hiệp phương sai của X và Y xác định bởi

$$\text{cov}(X, Y) = \mu_{XY} = E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

- Dễ thấy rằng

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Hiệp phương sai

Định nghĩa

Hiệp phương sai của X và Y xác định bởi

$$\text{cov}(X, Y) = \mu_{XY} = E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

- Dễ thấy rằng

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Nếu X và Y độc lập, thì $\text{cov}(X, Y) = 0$. Ngược lại không đúng.

Hệ số tương quan

Định nghĩa

Hệ số tương quan của X và Y xác định bởi

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$

Hệ số tương quan

Định nghĩa

Hệ số tương quan của X và Y xác định bởi

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$
- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

Hệ số tương quan

Định nghĩa

Hệ số tương quan của X và Y xác định bởi

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$
- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
- Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là có tương quan, nếu $\rho_{X,Y} \neq 0$. Ngược lại, ta nói X và Y không tương quan (phân biệt với độc lập, tính độc lập mạnh hơn tính tương quan)

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (đọc thêm)

Hàm phân phối đồng thời

Hàm phân phối đồng thời của (X, Y) xác định bởi

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F_{X,Y}(x, y) = P(X < x, Y < y) = \\ &= P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}) \end{aligned}$$

- Lưu ý, biến cố $\{X < x, Y < y\}$ là biến cố xảy ra đồng thời $\{X < x\} \cap \{Y < y\}$

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (đọc thêm)

Hàm phân phối đồng thời

Hàm phân phối đồng thời của (X,Y) xác định bởi

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F_{X,Y}(x, y) = P(X < x, Y < y) = \\ &= P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}) \end{aligned}$$

- Lưu ý, biến cố $\{X < x, Y < y\}$ là biến cố xảy ra đồng thời $\{X < x\} \cap \{Y < y\}$
- Ý nghĩa hình học: $F(x, y)$ là xác suất để điểm (X,Y) rơi vào hình chữ nhật vô hạn có 1 đỉnh tại điểm (x,y)

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$
- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$
- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$
- Hàm phân phối đồng thời là hàm không giảm theo từng đối số và theo cả hai đối số

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$
- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$
- Hàm phân phối đồng thời là hàm không giảm theo từng đối số và theo cả hai đối số
 - ❶ Nếu $x_1 < x_2$, thì $F_{X,Y}(x_1, y) \leq F_{X,Y}(x_2, y)$

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$
- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$
- Hàm phân phối đồng thời là hàm không giảm theo từng đối số và theo cả hai đối số
 - 1 Nếu $x_1 < x_2$, thì $F_{X,Y}(x_1, y) \leq F_{X,Y}(x_2, y)$
 - 2 Nếu $y_1 < y_2$, thì $F_{X,Y}(x, y_1) \leq F_{X,Y}(x, y_2)$

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$
- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$
- Hàm phân phối đồng thời là hàm không giảm theo từng đối số và theo cả hai đối số
 - 1 Nếu $x_1 < x_2$, thì $F_{X,Y}(x_1, y) \leq F_{X,Y}(x_2, y)$
 - 2 Nếu $y_1 < y_2$, thì $F_{X,Y}(x, y_1) \leq F_{X,Y}(x, y_2)$
 - 3 Nếu $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ thì $F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$

Tính chất

- $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$
- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$
- Hàm phân phối đồng thời là hàm không giảm theo từng đối số và theo cả hai đối số
 - 1 Nếu $x_1 < x_2$, thì $F_{X,Y}(x_1, y) \leq F_{X,Y}(x_2, y)$
 - 2 Nếu $y_1 < y_2$, thì $F_{X,Y}(x, y_1) \leq F_{X,Y}(x, y_2)$
 - 3 Nếu $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ thì $F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$
- $P(x_1 < X < x_2; y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Hàm mật độ đồng thời của (X,Y) xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{d^2 F(x, y)}{dx dy}$$

- Không âm: $f(x, y) \geq 0$

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Hàm mật độ đồng thời của (X,Y) xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{d^2 F(x, y)}{dx dy}$$

- Không âm: $f(x, y) \geq 0$
- Đầy đủ: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Hàm mật độ đồng thời của (X,Y) xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{d^2 F(x, y)}{dx dy}$$

- Không âm: $f(x, y) \geq 0$
- Đầy đủ: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
- $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Hàm mật độ đồng thời của (X,Y) xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{d^2 F(x, y)}{dx dy}$$

- Không âm: $f(x, y) \geq 0$
- Đầy đủ: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
- $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hàm mật độ xác suất đồng thời

Hàm mật độ đồng thời của (X,Y) xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{d^2 F(x, y)}{dx dy}$$

- Không âm: $f(x, y) \geq 0$
- Đầy đủ: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
- $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$
- $P\left((x, y) \in D\right) = \iint_D f(x, y) dx dy$

Ví dụ

Bài toán

Tính xác suất để điểm ngẫu nhiên rơi vào miền chữ nhật KLMN có các đỉnh $K(1, 1)$, $L(\sqrt{3}, 1)$, $M(1, 0)$, $N(\sqrt{3}, 0)$, với hàm mật độ đồng thời của (X, Y) xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}P((x, y) \in D) &= \iint_D \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \\&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \\&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4} = \\&= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) (\arctg 1 - \arctg 0) = \\&= \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi}{12} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

Biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hàm phân phối xác suất có điều kiện

Hàm phân phối xác suất có điều kiện của X với điều kiện $\{Y = y\}$ xác định bởi

$$F_X(x | y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Hàm mật độ xác suất có điều kiện

Hàm mật độ xác suất có điều kiện của X với điều kiện $\{Y = y\}$ xác định bởi

$$f_X(x | y) = \frac{dF_X(x | y)}{dx} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Tính độc lập của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập khi và chỉ khi một trong các điều sau thỏa mãn

① $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

Tính độc lập của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập khi và chỉ khi một trong các điều sau thỏa mãn

- 1 $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
- 2 $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

Tính độc lập của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập khi và chỉ khi một trong các điều sau thỏa mãn

- 1 $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
- 2 $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- 3 $F_X(x | y) = F_X(x), \quad \forall (x,y) \in \mathfrak{R}^2$

Tính độc lập của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập khi và chỉ khi một trong các điều sau thỏa mãn

- ① $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
- ② $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- ③ $F_X(x | y) = F_X(x), \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2$
- ④ $f_X(x | y) = f_X(x), \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2$

Bài tập

Bài tập 1.

Một hộp kín có 3 viên bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy lần lượt 2 bi từ hộp đó. Gọi X là số bi xanh được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X

Bài tập

Bài tập 1.

Một hộp kín có 3 viên bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy lần lượt 2 bi từ hộp đó. Gọi X là số bi xanh được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Tìm hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.

Bài tập

Bài tập 1.

Một hộp kín có 3 viên bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy lần lượt 2 bi từ hộp đó. Gọi X là số bi xanh được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Tìm hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.
- Tính $E(2X + 3)$ và $D(4X - 1)$.

Bài tập

Bài tập 1.

Một hộp kín có 3 viên bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy lần lượt 2 bi từ hộp đó. Gọi X là số bi xanh được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Tìm hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.
- Tính $E(2X + 3)$ và $D(4X - 1)$.
- Tính $P(0 < X \leq 2)$

Bài tập

Bài tập 2.

Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 2013 lần. Gọi X là số điểm sau 2013 lần gieo. Tính $E(X)$ và $D(X)$.

Bài tập 3.

Gieo một đồng xu cân đối đồng chất cho tới khi nào xuất hiện mặt sấp đầu tiên thì ngừng gieo. Gọi X là số lần gieo. Tính $E(X)$ và $D(X)$.

Bài tập

Bài tập 4.

Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất cho tới khi nào xuất hiện mặt lục đầu tiên thì ngừng gieo. Gọi X là số lần gieo. Tính $E(X)$ và $D(X)$.

Bài tập 5.

Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \frac{C}{e^{-x} + e^x}$$

- Tính hệ số C
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.
- Phải quan sát biến X bao nhiêu lần để xác suất có ít nhất một lần biến $X \in (\ln \frac{1}{\sqrt{3}}; \ln \sqrt{3})$ không bé hơn 0.999

Bài tập

Bài tập 6

Tuổi thọ của một loại côn trùng nào đó là một biến ngẫu nhiên X (đơn vị là tháng) với hàm mật độ như sau

$$p_X(x) = \begin{cases} Kx^2(4-x), & \text{nếu } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{nếu } x > 4; x < 0. \end{cases}$$

- Tìm K và vẽ đồ thị của $p_X(x)$.

Bài tập

Bài tập 6

Tuổi thọ của một loại côn trùng nào đó là một biến ngẫu nhiên X (đơn vị là tháng) với hàm mật độ như sau

$$p_X(x) = \begin{cases} Kx^2(4-x), & \text{nếu } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{nếu } x > 4; x < 0. \end{cases}$$

- Tìm K và vẽ đồ thị của $p_X(x)$.
- Tìm $\text{mod}(X)$.

Bài tập

Bài tập 6

Tuổi thọ của một loại côn trùng nào đó là một biến ngẫu nhiên X (đơn vị là tháng) với hàm mật độ như sau

$$p_X(x) = \begin{cases} Kx^2(4-x), & \text{nếu } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{nếu } x > 4; x < 0. \end{cases}$$

- Tìm K và vẽ đồ thị của $p_X(x)$.
- Tìm $\text{mod}(X)$.
- Tính xác suất để côn trùng chết trước khi nó được 1 tháng tuổi.

Bài tập

Bài tập 7

Trong một lô hàng 15 sản phẩm có 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 4 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X .

Bài tập

Bài tập 7

Trong một lô hàng 15 sản phẩm có 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 4 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X .
- Viết biểu thức hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.

Bài tập

Bài tập 7

Trong một lô hàng 15 sản phẩm có 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 4 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X .
- Viết biểu thức hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.
- Chọn ra 4 sản phẩm thì có mấy phế phẩm hay xảy ra hơn cả.

Bài tập

Bài tập 7

Trong một lô hàng 15 sản phẩm có 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 4 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X .
- Viết biểu thức hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.
- Chọn ra 4 sản phẩm thì có mấy phế phẩm hay xảy ra hơn cả.
- Nếu kiểm tra ngẫu nhiên 4 sản phẩm không gặp một phế phẩm nào thì chấp nhận lô hàng. Tìm xác suất để không nhận lô hàng đó.

Bài tập

Bài tập 8

Hộp thứ nhất có 2 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai ra 2 viên bi. Gọi X là số bi đỏ được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X .

Bài tập

Bài tập 8

Hộp thứ nhất có 2 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai ra 2 viên bi. Gọi X là số bi đỏ được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X .
- Xác định hàm phân phối xác suất của X .

Bài tập

Bài tập 8

Hộp thứ nhất có 2 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai ra 2 viên bi. Gọi X là số bi đỏ được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X .
- Xác định hàm phân phối xác suất của X .
- Tính Kỳ vọng $E(X)$ và phương sai $D(X)$.

Bài tập

Bài tập 9

Hộp thứ nhất có 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai ra 2 viên bi. Gọi X là số viên bi đỏ được lấy ra.

- Lập dãy phân phối xác suất cho biến ngẫu nhiên X

Bài tập

Bài tập 9

Hộp thứ nhất có 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai có 1 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai. Sau đó lấy từ hộp thứ hai ra 2 viên bi. Gọi X là số viên bi đỏ được lấy ra.

- Lập dãy phân phối xác suất cho biến ngẫu nhiên X
- Tìm hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ của biến X

Bài tập

Bài tập 10

Một hộp kín có 2 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Lấy đồng thời ra 2 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại A lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X

Bài tập 10

Một hộp kín có 2 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Lấy đồng thời ra 2 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại A lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$

Bài tập

Bài tập 10

Một hộp kín có 2 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Lấy đồng thời ra 2 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại A lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$
- Tính $E(2X + 3)$ và $D(3X - 4)$

Bài tập

Bài tập 10

Một hộp kín có 2 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Lấy đồng thời ra 2 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại A lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$
- Tính $E(2X + 3)$ và $D(3X - 4)$
- Tính xác suất $P(0 < X \leq 2)$ qua biểu thức của hàm phân phối xác suất $F_X(x)$.

Bài tập

Bài tập 11

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$p_X(x) = \begin{cases} A \cos x, & \text{nếu } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{nếu } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Xác định hệ số A .

Bài tập

Bài tập 11

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$p_X(x) = \begin{cases} A \cos x, & \text{nếu } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{nếu } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Xác định hệ số A .
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$

Bài tập

Bài tập 11

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$p_X(x) = \begin{cases} A \cos x, & \text{nếu } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{nếu } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Xác định hệ số A .
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$
- Tính các đặc trưng của X như kỳ vọng $E(X)$, phương sai $D(X)$, median Med và số trội Mod

Bài tập

Bài tập 11

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$p_X(x) = \begin{cases} A \cos x, & \text{nếu } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{nếu } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Xác định hệ số A .
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$
- Tính các đặc trưng của X như kỳ vọng $E(X)$, phương sai $D(X)$, median Med và số trội Mod
- Phải quan sát biến X bao nhiêu lần để xác suất có ít nhất một lần biến $X \in (0, \frac{\pi}{4})$ không bé hơn 0.995.

Bài tập 12.

Một hộp kín có 2 viên bi đen và 3 viên bi trắng. Lấy lần lượt (có hoàn lại) từng viên bi cho tới khi lấy được viên bi trắng. Gọi X là số viên bi đen được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X

Bài tập 12.

Một hộp kín có 2 viên bi đen và 3 viên bi trắng. Lấy lần lượt (có hoàn lại) từng viên bi cho tới khi lấy được viên bi trắng. Gọi X là số viên bi đen được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$

Bài tập 12.

Một hộp kín có 2 viên bi đen và 3 viên bi trắng. Lấy lần lượt (có hoàn lại) từng viên bi cho tới khi lấy được viên bi trắng. Gọi X là số viên bi đen được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$
- Tính $E(2X + 3)$ và $D(3X - 4)$

Bài tập 13.

Một lô hàng có 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm. Lấy đồng thời từ lô hàng ra 3 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X

Bài tập 13.

Một lô hàng có 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm. Lấy đồng thời từ lô hàng ra 3 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$

Bài tập 13.

Một lô hàng có 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm. Lấy đồng thời từ lô hàng ra 3 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm được lấy ra.

- Lập bảng phân phối xác suất của X
- Xác định hàm phân phối xác suất $F_X(x)$ và vẽ đồ thị hàm $F_X(x)$
- Nếu trong số 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một phế phẩm thì lô hàng không được chấp nhận. Tính xác suất lô hàng không được chấp nhận.

Bài tập

Bài tập 14.

Véc tơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ

$$f(x,y) = \frac{C}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

- Xác định hệ số C

Bài tập

Bài tập 14.

Véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ

$$f(x, y) = \frac{C}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

- Xác định hệ số C
- Tìm hàm phân phối xác suất $F_{X,Y}(x, y)$.

Bài tập

Bài tập 14.

Véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ

$$f(x, y) = \frac{C}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

- Xác định hệ số C
- Tìm hàm phân phối xác suất $F_{X,Y}(x, y)$.
- Tính các hàm phân phối biên duyên $F_X(x)$ và $F_Y(y)$.

Bài tập

Bài tập 14.

Véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ

$$f(x, y) = \frac{C}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

- Xác định hệ số C
- Tìm hàm phân phối xác suất $F_{X,Y}(x, y)$.
- Tính các hàm phân phối biên duyên $F_X(x)$ và $F_Y(y)$.
- Các biến ngẫu nhiên X và Y có độc lập không?