

# Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học

PGS.TS. Trần Lộc Hùng

HCMC, 9/ 2013

Ngày 22 tháng 9 năm 2013

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH-MARKETING  
KHOA CƠ BẢN, BỘ MÔN TOÁN-THỐNG KÊ

-----

PGS. TS. TRẦN LỘC HÙNG

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN HỌC

Tp. Hồ Chí Minh, 9/2013

# Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học

PGS.TS. Trần Lộc Hùng

HCMC, 9/ 2013

Ngày 22 tháng 9 năm 2013

Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

# Từ khóa (Key Words)

- Các luật phân phối xác suất

# Từ khóa (Key Words)

- Các luật phân phối xác suất
- Bất đẳng thức

# Từ khóa (Key Words)

- Các luật phân phối xác suất
- Bất đẳng thức
- Luật yếu các số lớn

# Từ khóa (Key Words)

- Các luật phân phối xác suất
- Bất đẳng thức
- Luật yếu các số lớn
- Định lý giới hạn địa phương

# Từ khóa (Key Words)

- Các luật phân phối xác suất
- Bất đẳng thức
- Luật yếu các số lớn
- Định lý giới hạn địa phương
- Định lý giới hạn tích phân



# Từ khóa (Key Words)

- Các luật phân phối xác suất
- Bất đẳng thức
- Luật yếu các số lớn
- Định lý giới hạn địa phương
- Định lý giới hạn tích phân
- Định lý giới hạn trung tâm

# Từ khóa (Key Words)

- Các luật phân phối xác suất
- Bất đẳng thức
- Luật yếu các số lớn
- Định lý giới hạn địa phương
- Định lý giới hạn tích phân
- Định lý giới hạn trung tâm
- Định lý xấp xỉ Poisson

## Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

### ❶ Các quy luật xác suất thường gặp

## Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

- 1 Các quy luật xác suất thường gặp
- 2 Bất đẳng thức Chebyshev và ứng dụng

## Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

- 1 Các quy luật xác suất thường gặp
- 2 Bất đẳng thức Chebyshev và ứng dụng
- 3 Các luật yếu các số lớn và các ứng dụng

## Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

- ❶ Các quy luật xác suất thường gặp
- ❷ Bất đẳng thức Chebyshev và ứng dụng
- ❸ Các luật yếu các số lớn và các ứng dụng
- ❹ Định lý xấp xỉ Poisson

## Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

- 1 Các quy luật xác suất thường gặp
- 2 Bất đẳng thức Chebyshev và ứng dụng
- 3 Các luật yếu các số lớn và các ứng dụng
- 4 Định lý xấp xỉ Poisson
- 5 Các định lý giới hạn de Moivre-Laplace

## Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

- 1 Các quy luật xác suất thường gặp
- 2 Bất đẳng thức Chebyshev và ứng dụng
- 3 Các luật yếu các số lớn và các ứng dụng
- 4 Định lý xấp xỉ Poisson
- 5 Các định lý giới hạn de Moivre-Laplace
- 6 Định lý giới hạn trung tâm



## Chương 4. Các định lý giới hạn và ứng dụng

- 1 Các quy luật xác suất thường gặp
- 2 Bất đẳng thức Chebyshev và ứng dụng
- 3 Các luật yếu các số lớn và các ứng dụng
- 4 Định lý xấp xỉ Poisson
- 5 Các định lý giới hạn de Moivre-Laplace
- 6 Định lý giới hạn trung tâm
- 7 Bài tập

# Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật Bernoulli

# Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật Bernoulli
- Quy luật nhị thức

# Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật Bernoulli
- Quy luật nhị thức
- Quy luật Poisson

# Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật Bernoulli
- Quy luật nhị thức
- Quy luật Poisson
- Quy luật hình học

# Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật Bernoulli
- Quy luật nhị thức
- Quy luật Poisson
- Quy luật hình học
- Quy luật nhị thức âm

# Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật Bernoulli
- Quy luật nhị thức
- Quy luật Poisson
- Quy luật hình học
- Quy luật nhị thức âm
- Quy luật siêu hình học

## 4.1 Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật đều



## 4.1 Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật đều
- Quy luật mũ

## 4.1 Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật đều
- Quy luật mũ
- Quy luật Cauchy

## 4.1 Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật đều
- Quy luật mũ
- Quy luật Cauchy
- Quy luật chuẩn<sup>2</sup>

## 4.1 Các quy luật xác suất thường gặp

- Quy luật đều
- Quy luật mũ
- Quy luật Cauchy
- Quy luật chuẩn
- Quy luật loga-chuẩn

# 1. Quy luật Bernoulli

- Bài toán

# 1. Quy luật Bernoulli

- Bài toán
- Các đặc trưng

# 1. Quy luật Bernoulli

- Bài toán
- Các đặc trưng
- Các ví dụ

# Quy luật Bernoulli

## Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  tuân theo quy luật Bernoulli, ký hiệu  $X \sim B(p)$ , nếu

$$P(X = 1) = p; \quad P(X = 0) = 1 - p, p \in (0, 1)$$

- $X$  là số thành công của phép thử



# Quy luật Bernoulli

## Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  tuân theo quy luật Bernoulli, ký hiệu  $X \sim B(p)$ , nếu

$$P(X = 1) = p; \quad P(X = 0) = 1 - p, p \in (0, 1)$$

- $X$  là số thành công của phép thử
- $p$  là xác suất thành công của phép thử

# Các ví dụ

- Sắp ngữa, sống chết, đúng sai, ...

# Các ví dụ

- Sắp ngửa, sống chết, đúng sai, ...
- Biến ngẫu nhiên nhận một trong hai giá trị 0 và 1, với xác suất  $p$  và  $(1-p)$ , tương ứng.

# Các ví dụ

- Sắp ngữa, sống chết, đúng sai, ...
- Biến ngẫu nhiên nhận một trong hai giá trị 0 và 1, với xác suất  $p$  và  $(1-p)$ , tương ứng.
- Ứng dụng trong tin học (số 0 và số 1), trong logic toán (đúng và sai), trong y học (sống và chết), trong kiểm định chất lượng (tốt và xấu), ...

# Các đặc trưng

- Kỳ vọng  $E(X) = p$

# Các đặc trưng

- Kỳ vọng  $E(X) = p$
- Phương sai  $D(X) = p(1 - p)$

# Quy luật nhị thức

## Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  tuân theo quy luật nhị thức, ký hiệu  $X \sim B_n(p)$ , nếu

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; \quad 0 \leq k \leq n, p \in (0, 1)$$

- $X$  là số thành công của  $n$  phép thử Bernoulli

# Quy luật nhị thức

## Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  tuân theo quy luật nhị thức, ký hiệu  $X \sim B_n(p)$ , nếu

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; \quad 0 \leq k \leq n, p \in (0, 1)$$

- $X$  là số thành công của  $n$  phép thử Bernoulli
- $p$  là xác suất thành công của một phép thử



# Quy luật nhị thức

## Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  tuân theo quy luật nhị thức, ký hiệu  $X \sim B_n(p)$ , nếu

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; \quad 0 \leq k \leq n, p \in (0, 1)$$

- $X$  là số thành công của  $n$  phép thử Bernoulli
- $p$  là xác suất thành công của một phép thử
- khi  $n=1$ , ta có quy luật Bernoulli

# Quy luật nhị thức

## Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  tuân theo quy luật nhị thức, ký hiệu  $X \sim B_n(p)$ , nếu

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; \quad 0 \leq k \leq n, p \in (0, 1)$$

- $X$  là số thành công của  $n$  phép thử Bernoulli
- $p$  là xác suất thành công của một phép thử
- khi  $n=1$ , ta có quy luật Bernoulli
- Hệ số nhị thức  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \leq k \leq n$ .

## Các ví dụ

- Kiểm định chất lượng của 300 trường đại học, tiến hành kiểm toán 150 ngân hàng, ...

# Các ví dụ

- Kiểm định chất lượng của 300 trường đại học, tiến hành kiểm toán 150 ngân hàng, ...
- Xét nghiệm máu cho 1000 người có khả năng bị HIV với xác suất phát hiện HIV trong một phép thử là 0.99.

## Các ví dụ

- Kiểm định chất lượng của 300 trường đại học, tiến hành kiểm toán 150 ngân hàng, ...
- Xét nghiệm máu cho 1000 người có khả năng bị HIV với xác suất phát hiện HIV trong một phép thử là 0.99.
- Số USB bị nhiễm virus trong 1500 USB bán ra, với xác suất nhiễm là 0.001

# Các đặc trưng

Kỳ vọng

$$E(X) = \mu = np$$

Phương sai

$$D(X) = \sigma^2 = np(1 - p)$$

# Chứng minh

- Coi  $X_j = 1$  nếu phép thử thứ  $j$  thành công, với xác suất  $p$

# Chứng minh

- Coi  $X_j = 1$  nếu phép thử thứ  $j$  thành công, với xác suất  $p$
- Coi  $X_j = 0$  nếu phép thử thứ  $j$  không thành công, với xác suất  $1-p$



# Chứng minh

- Coi  $X_j = 1$  nếu phép thử thứ  $j$  thành công, với xác suất  $p$
- Coi  $X_j = 0$  nếu phép thử thứ  $j$  không thành công, với xác suất  $1-p$
- Các biến ngẫu nhiên  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là độc lập, cùng phân phối

# Chứng minh

- Coi  $X_j = 1$  nếu phép thử thứ  $j$  thành công, với xác suất  $p$
- Coi  $X_j = 0$  nếu phép thử thứ  $j$  không thành công, với xác suất  $1-p$
- Các biến ngẫu nhiên  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là độc lập, cùng phân phối
- Số phép thử thành công trong  $n$  phép thử độc lập là

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

# Chứng minh

- Coi  $X_j = 1$  nếu phép thử thứ  $j$  thành công, với xác suất  $p$
- Coi  $X_j = 0$  nếu phép thử thứ  $j$  không thành công, với xác suất  $1-p$
- Các biến ngẫu nhiên  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là độc lập, cùng phân phối
- Số phép thử thành công trong  $n$  phép thử độc lập là

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- Khi đó,

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = nE(X_1) = np$$

và do tính độc lập, nên

$$D(X) = D(X_1) + \dots + D(X_n) = nD(X_1) = np(1 - p)$$

# Hạn chế của quy luật

- Khi số phép thử lớn,  $p$  quá gần 0 hoặc gần 1.

# Hạn chế của quy luật

- Khi số phép thử lớn,  $p$  quá gần 0 hoặc gần 1.
- Xác suất  $p \in (0, 1)$ , nhưng  $n$  quá lớn

# Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace

## Định lý

Xét một dãy phép thử Bernoulli có xác suất thành công  $p \in (0, 1)$ .  $X$  là số phép thử thành công. Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi(x_k)$$

ở đây

Hàm Laplace-mô hình chuẩn chính tắc

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

# Giải thích

- Hàm  $\varphi(x)$  là hàm mật độ của mô hình chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ .

# Giải thích

- Hàm  $\varphi(x)$  là hàm mật độ của mô hình chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ .
- Xác suất  $p \in (0, 1)$ , nhưng  $n$  quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi.



# Giải thích

- Hàm  $\varphi(x)$  là hàm mật độ của mô hình chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ .
- Xác suất  $p \in (0, 1)$ , nhưng  $n$  quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi.
- Khi  $n$  lớn, có xấp xỉ

$$P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi(x_k)$$

# Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace

## Ví dụ

Gieo 6000 lần một con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất có đúng 1000 lần xuất hiện mặt "lục"

ở đây

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .
- $n = 6000$  là quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi, vì

$$\begin{aligned} P(X = 1000) &= P_{6000}(1000; 1/6) = \\ &= \frac{6000!}{1000!(6000 - 1000)!} (1/6)^{1000} (1 - 1/6)^{5000} \end{aligned}$$

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .
- $n = 6000$  là quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi, vì

$$P(X = 1000) = P_{6000}(1000; 1/6) =$$

$$= \frac{6000!}{1000!(6000 - 1000)!} (1/6)^{1000} (1 - 1/6)^{5000}$$

- Sử dụng định lý giới hạn đa phương de Moivre- Laplace, có xấp xỉ

$$\begin{aligned} P(X = 1000) &= \frac{1}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times (1 - 1/6)}} \varphi(0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times (1 - 1/6)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.01909859 \end{aligned}$$

### 3. Quy luật Poisson

#### Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  có quy luật Poisson với tham số  $\lambda$ , ký hiệu  $X \sim P(\lambda)$ , nếu

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad \lambda > 0; \quad k = 1, 2, \dots$$

- $X$  là số các cuộc gọi điện thoại tới tổng đài trong khoảng thời gian xác định  $[t_0, t_1]$ .

### 3. Quy luật Poisson

#### Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  có quy luật Poisson với tham số  $\lambda$ , ký hiệu  $X \sim P(\lambda)$ , nếu

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad \lambda > 0; \quad k = 1, 2, \dots$$

- $X$  là số các cuộc gọi điện thoại tới tổng đài trong khoảng thời gian xác định  $[t_0, t_1]$ .
- $\lambda$  là tốc độ cuộc gọi trong một khoảng thời gian.  $\lambda$  là hằng số dương.

### 3. Quy luật Poisson

#### Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên  $X$  có quy luật Poisson với tham số  $\lambda$ , ký hiệu  $X \sim P(\lambda)$ , nếu

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad \lambda > 0; \quad k = 1, 2, \dots$$

- $X$  là số các cuộc gọi điện thoại tới tổng đài trong khoảng thời gian xác định  $[t_0, t_1]$ .
- $\lambda$  là tốc độ cuộc gọi trong một khoảng thời gian.  $\lambda$  là hằng số dương.
- Là trường hợp đặc biệt của mô hình nhị thức khi  $n$  lớn và  $p$  bé.



# Xây dựng quy luật Poisson từ quy luật nhị thức

## Định lý xấp xỉ Poisson

Giả sử  $p_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$  và  $np_n = \lambda$ . Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-1} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Công thức gần đúng

Khi  $n$  lớn,  $p$  gần với 0 hoặc 1

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-1} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad k = 1, 2, \dots$$

## Chứng minh.

- Sử dụng biến đổi công thức Bernoulli và giả thiết  $p_n = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

## Chứng minh.

- Sử dụng biến đổi công thức Bernoulli và giả thiết  $p_n = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

- Cho  $n \rightarrow \infty$ , ta được

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

# Các đặc trưng

## Kỳ vọng và phương sai

Nếu  $X \sim P(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , thì  $E(X) = D(X) = \lambda$

- Đặc trưng cho biến cố hiếm, ít xảy ra (động đất, sóng thần, ung thư ...)

# Các đặc trưng

## Kỳ vọng và phương sai

Nếu  $X \sim P(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , thì  $E(X) = D(X) = \lambda$

- Đặc trưng cho biến cố hiếm, ít xảy ra (động đất, sóng thần, ung thư ...)
- Hai đặc trưng bằng nhau.

## Bài toán

Phép thử Bernoulli được tiến hành cho tới khi xuất hiện biến cố A đầu tiên.

- $X$  là số phép thử Bernoulli phải tiến hành.

## Bài toán

Phép thử Bernoulli được tiến hành cho tới khi xuất hiện biến cố A đầu tiên.

- $X$  là số phép thử Bernoulli phải tiến hành.
- Xác suất xuất hiện biến cố A là  $p, p \in (0, 1)$ .

## Công thức

$$X \sim \text{Geo}(p) \Leftrightarrow P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$$

- $n \geq 1, p \in (0, 1)$



## Công thức

$$X \sim \text{Geo}(p) \Leftrightarrow P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$$

- $n \geq 1, p \in (0, 1)$
- Gieo đồng tiền cho tới khi nào sấp thì ngừng

# Các đặc trưng

Kỳ vọng

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Phương sai

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

# Quy luật nhị thức âm

## Bài toán

Phép thử Bernoulli được tiến hành cho tới khi biến cố A xuất hiện biến cố đúng  $k$  lần.

- $n$  là số phép thử Bernoulli phải tiến hành.

## Bài toán

Phép thử Bernoulli được tiến hành cho tới khi biến cố A xuất hiện biến cố đúng  $k$  lần.

- $n$  là số phép thử Bernoulli phải tiến hành.
- $k$  là số lần xuất hiện biến cố A,  $k = n, n + 1, \dots$

## Bài toán

Phép thử Bernoulli được tiến hành cho tới khi biến cố A xuất hiện biến cố đúng  $k$  lần.

- $n$  là số phép thử Bernoulli phải tiến hành.
- $k$  là số lần xuất hiện biến cố A,  $k = n, n + 1, \dots$
- Xác suất xuất hiện biến cố A là  $p, p \in (0, 1)$ .

# Quy luật nhị thức âm

## Công thức

$$X \sim NB_n(p) \Leftrightarrow P(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

- có dạng công thức Bernoulli

# Quy luật nhị thức âm

## Công thức

$$X \sim NB_n(p) \Leftrightarrow P(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

- có dạng công thức Bernoulli
- $NB_n(p)$  là Negative Binomial model

# Các đặc trưng

Kỳ vọng

$$E(X) = n\frac{1}{p}$$

Phương sai

$$D(X) = n\frac{1-p}{p^2}$$



## Tổng

Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  độc lập và  $X_j \sim \text{Geo}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ , thì

$$X = \sum_{j=1}^n X_j \sim \text{NB}_n(p)$$

# Quy luật siêu hình học/Siêu bội

- Tổng thể có  $N$  phần tử, trong đó có  $M$  phần tử có tính  $A$ , còn lại  $(N-M)$  phần tử có tính  $\bar{A}$ . Lấy đồng thời ra  $n$  phần tử từ tổng thể đó. Gọi  $X$  là số phần tử có tính chất  $A$  trong số các phần tử lấy ra.

## Công thức

$$X \sim SGeo \Leftrightarrow P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

# Quy luật siêu hình học/Siêu bội

- Tổng thể có  $N$  phần tử, trong đó có  $M$  phần tử có tính  $A$ , còn lại  $(N-M)$  phần tử có tính  $\bar{A}$ . Lấy đồng thời ra  $n$  phần tử từ tổng thể đó. Gọi  $X$  là số phần tử có tính chất  $A$  trong số các phần tử lấy ra.
- $X$  có quy luật siêu hình học,  $X \sim SGeo$ .

## Công thức

$$X \sim SGeo \Leftrightarrow P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

## Các ví dụ

- 1 Trong  $10^6$  vé xổ số có 50 giải thưởng. Một người mua 10 vé. Tính xác suất để người đó trúng ít nhất 1 giải.
- 2 Trong một khu vực bầu cử có 10.000 cử tri, có 7820 người ủng hộ ứng cử viên A. Chọn một mẫu gồm 200 người. Tính xác suất trong mẫu đó có 142 người ủng hộ A.

# Quy luật phân phối đều

## Công thức

$$X \sim U[a, b] \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \forall x \in (a, b)$$

- $f_X(x) = 0, \forall x \notin (a, b)$

# Quy luật phân phối đều

## Công thức

$$X \sim U[a, b] \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \forall x \in (a, b)$$

- $f_X(x) = 0, \forall x \notin (a, b)$
- Giải thích tính đều qua đồ thị hàm mật độ  $f_X(x)$

# Quy luật phân phối đều

## Công thức

$$X \sim U[a, b] \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \forall x \in (a, b)$$

- $f_X(x) = 0, \forall x \notin (a, b)$
- Giải thích tính đều qua đồ thị hàm mật độ  $f_X(x)$
- Thường gặp trường hợp đều trên  $[0,1]$ .

# Các đặc trưng

Kỳ vọng

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Phương sai

$$D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$



## 7. Quy luật mũ

$X$  có quy luật mũ  $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{nếu } t > 0, \quad \lambda > 0$$

hay

Hàm mật độ

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{nếu } t > 0$$

- Mô tả sự hỏng hóc của một hệ thống, thời gian sống (life-time) của một sinh vật.

## 7. Quy luật mũ

$X$  có quy luật mũ  $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{nếu } t > 0, \quad \lambda > 0$$

hay

Hàm mật độ

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{nếu } t > 0$$

- Mô tả sự hỏng hóc của một hệ thống, thời gian sống (life-time) của một sinh vật.
- Phù hợp với mọi quy luật tự nhiên về sự hỏng, sự sống.

## Các đặc trưng của quy luật mũ

Kỳ vọng

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Phương sai

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Mô ment bậc  $r$

$$\mu_r = \frac{r!}{\lambda^r}, r \geq 1$$

# Tính không trí nhớ

## Định nghĩa

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s), \quad \forall s, t \geq 0$$

- Hệ thống đã hoạt động qua  $(s+t)$  thời gian, với điều kiện đã trải qua  $t$  thời gian, nhưng hệ thống không nhớ đã qua  $t$  thời gian.

# Tính không trí nhớ

## Định nghĩa

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s), \quad \forall s, t \geq 0$$

- Hệ thống đã hoạt động qua  $(s+t)$  thời gian, với điều kiện đã trải qua  $t$  thời gian, nhưng hệ thống không nhớ đã qua  $t$  thời gian.
- Từ định nghĩa suy ra

$$\begin{aligned} \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} &= e^{-\lambda(s+t)} = \frac{e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \\ &= e^{-\lambda s} = P(X > s) \end{aligned}$$

## Ví dụ

- Giả sử tổng thời gian phải chờ ở ngân hàng có quy luật mũ với trung bình 10 phút

## Ví dụ

- Giả sử tổng thời gian phải chờ ở ngân hàng có quy luật mũ với trung bình 10 phút
  - 1 Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút

# Ví dụ

- Giả sử tổng thời gian phải chờ ở ngân hàng có quy luật mũ với trung bình 10 phút
  - ① Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút
  - ② Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút, nếu ông ta còn ở lại ngân hàng sau 10 phút.



## Ví dụ

- Giả sử tổng thời gian phải chờ ở ngân hàng có quy luật mũ với trung bình 10 phút
  - ① Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút
  - ② Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút, nếu ông ta còn ở lại ngân hàng sau 10 phút.
- Giải:

## Ví dụ

- Giả sử tổng thời gian phải chờ ở ngân hàng có quy luật mũ với trung bình 10 phút
  - 1 Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút
  - 2 Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút, nếu ông ta còn ở lại ngân hàng sau 10 phút.
- Giải:

- 1 Giả sử  $X$  là thời gian khách hàng phải chờ nhiều hơn 15 phút. Khi đó,

$$P(X > 15) = e^{-15 \cdot \frac{1}{10}} = e^{-2/3} \approx 0.513417119$$

## Ví dụ

- Giả sử tổng thời gian phải chờ ở ngân hàng có quy luật mũ với trung bình 10 phút
  - Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút
  - Tính xác suất để một khách hàng phải chờ ở ngân hàng nhiều hơn 15 phút, nếu ông ta còn ở lại ngân hàng sau 10 phút.
- Giải:

- Giả sử  $X$  là thời gian khách hàng phải chờ nhiều hơn 15 phút. Khi đó,

$$P(X > 15) = e^{-15 \cdot \frac{1}{10}} = e^{-2/3} \approx 0.513417119$$

- Do không có trí nhớ, nên

$$P(X > 15 \mid X > 10) = P(X > 5 + 10 \mid X > 10) = P(X > 5) =$$

$$= e^{-5 \cdot \frac{1}{10}} \approx 0.606530659$$

## 8. Quy luật Cauchy

### Bài toán

Trong mặt phẳng cho đường thẳng  $\Delta$  và điểm nguồn  $A \notin \Delta$ . Bắn các hạt (phân tử) từ điểm  $A$  theo hướng ngẫu nhiên đến  $\Delta$ . Gọi  $B$  là vị trí va chạm của hạt với  $\Delta$ .

- Rõ ràng vị trí  $B$  là ngẫu nhiên.

## 8. Quy luật Cauchy

### Bài toán

Trong mặt phẳng cho đường thẳng  $\Delta$  và điểm nguồn  $A \notin \Delta$ . Bắn các hạt (phân tử) từ điểm  $A$  theo hướng ngẫu nhiên đến  $\Delta$ . Gọi  $B$  là vị trí va chạm của hạt với  $\Delta$ .

- Rõ ràng vị trí  $B$  là ngẫu nhiên.
- Xuất phát từ thí nghiệm vật lý

# Quy luật Cauchy

- Gọi  $O$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$

# Quy luật Cauchy

- Gọi  $O$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$
- Ký hiệu  $\varphi = \widehat{OAB}$

# Quy luật Cauchy

- Gọi  $O$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$
- Ký hiệu  $\varphi = \widehat{OAB}$
- Theo giả thiết bài toán thì  $\varphi \sim U[-\pi/2, \pi/2]$



# Quy luật Cauchy

- Gọi  $O$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$
- Ký hiệu  $\varphi = \widehat{OAB}$
- Theo giả thiết bài toán thì  $\varphi \sim U[-\pi/2, \pi/2]$
- Đặt  $X = \overline{OB}$ ,  $\lambda = OA$  thì  $X$  là biến ngẫu nhiên và  $X = \lambda \operatorname{tg}(\varphi)$

# Quy luật Cauchy

- Gọi  $O$  là hình chiếu của  $A$  lên  $\Delta$
- Ký hiệu  $\varphi = \widehat{OAB}$
- Theo giả thiết bài toán thì  $\varphi \sim U[-\pi/2, \pi/2]$
- Đặt  $X = \overline{OB}$ ,  $\lambda = OA$  thì  $X$  là biến ngẫu nhiên và  $X = \lambda \operatorname{tg}(\varphi)$
- Khi đó, với  $x \in \mathbb{R}$ , hàm phân phối xác suất của  $X$  là

$$F_X(x) = P(X < x) = P(\varphi < \operatorname{arctg}(x/\lambda)) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg}(x/\lambda)}{\pi}$$

# Quy luật Cauchy

- Hàm mật độ xác suất  $p_X(x)$  xác định bởi

$$p_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$$

# Quy luật Cauchy

- Hàm mật độ xác suất  $p_X(x)$  xác định bởi

$$p_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$$

- Biến ngẫu nhiên  $X$  được gọi là có Quy luật Cauchy.

- phân phối Cauchy được biết như là phân phối Lorentz, hàm Lorentz hay phân phối Breit-Wigner

# Trong vật lý

- phân phối Cauchy được biết như là phân phối Lorentz, hàm Lorentz hay phân phối Breit-Wigner
- Hàm Lorentz là nghiệm của phương trình vi phân mô tả lực cộng hưởng

- phân phối Cauchy được biết như là phân phối Lorentz, hàm Lorentz hay phân phối Breit-Wigner
- Hàm Lorentz là nghiệm của phương trình vi phân mô tả lực cộng hưởng
- Trong vật lý quang phổ, nó dùng để biểu diễn hình dạng các đường quang phổ được nới rộng bởi nhiều cơ cấu máy móc, đặc biệt là sự va chạm

# Trong vật lý

- phân phối Cauchy được biết như là phân phối Lorentz, hàm Lorentz hay phân phối Breit-Wigner
- Hàm Lorentz là nghiệm của phương trình vi phân mô tả lực cộng hưởng
- Trong vật lý quang phổ, nó dùng để biểu diễn hình dạng các đường quang phổ được nới rộng bởi nhiều cơ cấu máy móc, đặc biệt là sự va chạm
- Quy luật Cauchy không có kỳ vọng và phương sai.



## 9. Quy luật chuẩn Gauss

$X$  có quy luật chuẩn  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

hay

Hàm mật độ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Mô tả quy luật các sai số trong các phép đo.

## 9. Quy luật chuẩn Gauss

$X$  có quy luật chuẩn  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

hay

Hàm mật độ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Mô tả quy luật các sai số trong các phép đo.
- Phù hợp với mọi quy luật vật lý, xác suất, thống kê, ...

# Các đặc trưng

Kỳ vọng, phương sai

$$E(X) = \mu; \quad D(X) = \sigma^2$$

# Quy luật chuẩn chính tắc $N(0,1)$ của Laplace

Hàm mật độ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Kỳ vọng, phương sai

$$E(X) = 0; \quad D(X) = 1$$

# Chuyển đổi

## Chính tắc hóa

Mọi biến ngẫu nhiên  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  đều có thể đưa về  $Y \sim N(0, 1)$ , nếu

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Dễ thấy, khi đó

## Kỳ vọng, phương sai

$$E(Y) = 0; \quad D(Y) = 1$$

# Giải thích nghĩa "chuẩn"

- Là quy luật được phát hiện bởi Gauss và Laplace (một cách độc lập) từ các bài toán vật lý

# Giải thích nghĩa "chuẩn"

- Là quy luật được phát hiện bởi Gauss và Laplace (một cách độc lập) từ các bài toán vật lý
- Là phân phối giới hạn của nhiều phân phối khác khi  $n$  rất lớn

# Giải thích nghĩa "chuẩn"

- Là quy luật được phát hiện bởi Gauss và Laplace (một cách độc lập) từ các bài toán vật lý
- Là phân phối giới hạn của nhiều phân phối khác khi  $n$  rất lớn
- Định lý được quan tâm là định lý giới hạn trung tâm.



## 10. Quy luật Loga-chuẩn

### Bài toán Galton, 1879

Giả sử  $X_1, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên dương, độc lập, cùng phân phối. Đặt  $T_n = \prod_{j=1}^n X_j$ . Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\log T_n < t) = \Phi(t)$$

# Quy luật Loga-chuẩn

Từ đây,

Định nghĩa

$$X \sim \log N(0, 1) \iff \log X \sim N(0, 1)$$

# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì

# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì
  - ① trung bình số học  $n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  có phân phối giới hạn tiệm cận chuẩn

# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì
  - ① trung bình số học  $n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  có phân phối giới hạn tiệm cận chuẩn
  - ② trung bình hình học  $(\prod_{j=1}^n X_j)^{1/n}$  có phân phối giới hạn tiệm cận Loga-Chuẩn

# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì
  - ① trung bình số học  $n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  có phân phối giới hạn tiệm cận chuẩn
  - ② trung bình hình học  $(\prod_{j=1}^n X_j)^{1/n}$  có phân phối giới hạn tiệm cận Loga-Chuẩn
- Phân phối Loga-Chuẩn thường mô tả các đại lượng như

# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì
  - ① trung bình số học  $n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  có phân phối giới hạn tiệm cận chuẩn
  - ② trung bình hình học  $(\prod_{j=1}^n X_j)^{1/n}$  có phân phối giới hạn tiệm cận Loga-Chuẩn
- Phân phối Loga-Chuẩn thường mô tả các đại lượng như
  - ① trọng lượng của người trưởng thành

# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì
  - ① trung bình số học  $n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  có phân phối giới hạn tiệm cận chuẩn
  - ② trung bình hình học  $(\prod_{j=1}^n X_j)^{1/n}$  có phân phối giới hạn tiệm cận Loga-Chuẩn
- Phân phối Loga-Chuẩn thường mô tả các đại lượng như
  - ① trọng lượng của người trưởng thành
  - ② nồng độ các khoáng chất trong lớp đất tích tụ trong lòng đất



# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì
  - ① trung bình số học  $n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  có phân phối giới hạn tiệm cận chuẩn
  - ② trung bình hình học  $(\prod_{j=1}^n X_j)^{1/n}$  có phân phối giới hạn tiệm cận Loga-Chuẩn
- Phân phối Loga-Chuẩn thường mô tả các đại lượng như
  - ① trọng lượng của người trưởng thành
  - ② nồng độ các khoáng chất trong lớp đất tích tụ trong lòng đất
  - ③ phân phối của cải

# Quy luật Loga-chuẩn

- Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, nhận giá trị dương thì
  - ① trung bình số học  $n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  có phân phối giới hạn tiệm cận chuẩn
  - ② trung bình hình học  $(\prod_{j=1}^n X_j)^{1/n}$  có phân phối giới hạn tiệm cận Loga-Chuẩn
- Phân phối Loga-Chuẩn thường mô tả các đại lượng như
  - ① trọng lượng của người trưởng thành
  - ② nồng độ các khoáng chất trong lớp đất tích tụ trong lòng đất
  - ③ phân phối của cải
  - ④ thời gian máy móc hư

# Quy luật Loga-chuẩn

## Hàm mật độ

Nếu  $X \sim \log N(\mu, \sigma)$ , thì hàm mật độ dạng

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (x > 0)$$

# Quy luật Loga-chuẩn

## Hàm phân phối xác suất

Nếu  $X \sim \text{log}N(\mu, \sigma)$ , thì hàm phân phối xác suất

$$F(x) = \int_0^x p(t)dt = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), \quad (x > 0).$$

trong đó  $\mu$ : tham số tỷ lệ (scale),  $\sigma$ : tham số shape và

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  là hàm Laplace.

# Các đặc trưng mô hình Loga-chuẩn<sup>2</sup>

- Moment cấp  $k$  :  $\mu_k = \mathbb{E}(X^k) = e^{k\mu + k^2\sigma^2/2}$ .

# Các đặc trưng mô hình Loga-chuẩn

- Moment cấp  $k$  :  $\mu_k = \mathbb{E}(X^k) = e^{k\mu + k^2\sigma^2/2}$ .
- Kỳ vọng  $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ .

# Các đặc trưng mô hình Loga-chuẩn<sup>2</sup>

- Moment cấp  $k$  :  $\mu_k = \mathbb{E}(X^k) = e^{k\mu + k^2\sigma^2/2}$ .
- Kỳ vọng  $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ .
- Phương sai  $Var(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ .

# Các đặc trưng mô hình Loga-chuẩn

- Moment cấp  $k$  :  $\mu_k = \mathbb{E}(X^k) = e^{k\mu + k^2\sigma^2/2}$ .
- Kỳ vọng  $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ .
- Phương sai  $Var(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ .
- Mode =  $e^{\mu - \sigma^2}$ ; Median =  $e^{\mu}$ .



# Các định lý giới hạn

- Định lý xấp xỉ Poisson

# Các định lý giới hạn

- Định lý xấp xỉ Poisson
- Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace

# Các định lý giới hạn

- Định lý xấp xỉ Poisson
- Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace
- Định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace

# Các định lý giới hạn

- Định lý xấp xỉ Poisson
- Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace
- Định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace
- Định lý giới hạn trung tâm

# Bản chất của các định lý giới hạn

- Xét các trường hợp khi công thức Bernoulli không còn thích hợp

# Bản chất của các định lý giới hạn

- Xét các trường hợp khi công thức Bernoulli không còn thích hợp
  - ① khi  $n$  lớn,  $p$  bé (hoặc gần 1) có định lý xấp xỉ Poisson

# Bản chất của các định lý giới hạn

- Xét các trường hợp khi công thức Bernoulli không còn thích hợp
  - ① khi  $n$  lớn,  $p$  bé (hoặc gần 1) có định lý xấp xỉ Poisson
  - ② khi  $n$  lớn,  $p \in (0, 1)$  có định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace

# Bản chất của các định lý giới hạn

- Xét các trường hợp khi công thức Bernoulli không còn thích hợp
  - ① khi  $n$  lớn,  $p$  bé (hoặc gần 1) có định lý xấp xỉ Poisson
  - ② khi  $n$  lớn,  $p \in (0, 1)$  có định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace
  - ③ khi  $n$  lớn, số phép thử thành công thuộc khoảng  $(k_1, k_2)$  có định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace



# Bản chất của các định lý giới hạn

- Xét các trường hợp khi công thức Bernoulli không còn thích hợp
  - ① khi  $n$  lớn,  $p$  bé (hoặc gần 1) có định lý xấp xỉ Poisson
  - ② khi  $n$  lớn,  $p \in (0, 1)$  có định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace
  - ③ khi  $n$  lớn, số phép thử thành công thuộc khoảng  $(k_1, k_2)$  có định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace
- Xét trường hợp tổng quát, cho một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng và phương sai hữu hạn (Định lý giới hạn trung tâm)

# Bản chất của các định lý giới hạn

- Xét các trường hợp khi công thức Bernoulli không còn thích hợp
  - ① khi  $n$  lớn,  $p$  bé (hoặc gần 1) có định lý xấp xỉ Poisson
  - ② khi  $n$  lớn,  $p \in (0, 1)$  có định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace
  - ③ khi  $n$  lớn, số phép thử thành công thuộc khoảng  $(k_1, k_2)$  có định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace
- Xét trường hợp tổng quát, cho một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng và phương sai hữu hạn (Định lý giới hạn trung tâm)
- Xét trường hợp tổng quát, cho một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, không cùng phân phối với kỳ vọng và phương sai hữu hạn (Định lý giới hạn trung tâm Lindeberg-Feller)

# Định lý xấp xỉ Poisson

## Định lý

Giả sử  $p_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$  và  $np_n = \lambda$ . Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-1} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Công thức gần đúng

Khi  $n$  lớn,  $p$  gần với 0 hoặc 1

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-1} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad k = 1, 2, \dots$$

## Chứng minh.

- Sử dụng biến đổi công thức Bernoulli và giả thiết  $p_n = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

## Chứng minh.

- Sử dụng biến đổi công thức Bernoulli và giả thiết  $p_n = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

- Cho  $n \rightarrow \infty$ , ta được

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

# Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace

## Định lý

Xét một dãy phép thử Bernoulli có xác suất thành công  $p \in (0, 1)$ .  $X$  là số phép thử thành công. Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi(x_k)$$

ở đây

Hàm Laplace-mô hình chuẩn chính tắc

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

# Giải thích

- Hàm  $\varphi(x)$  là hàm mật độ của mô hình chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ .

# Giải thích

- Hàm  $\varphi(x)$  là hàm mật độ của mô hình chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ .
- Xác suất  $p \in (0, 1)$ , nhưng  $n$  quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi.



# Giải thích

- Hàm  $\varphi(x)$  là hàm mật độ của mô hình chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ .
- Xác suất  $p \in (0, 1)$ , nhưng  $n$  quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi.
- Khi  $n$  lớn, có xấp xỉ

$$P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi(x_k)$$

# Định lý giới hạn địa phương de Moivre-Laplace

## Ví dụ

Gieo 6000 lần một con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất có đúng 1000 lần xuất hiện mặt "lục"

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .
- $n = 6000$  là quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi, vì

$$\begin{aligned} P(X = 1000) &= P_{6000}(1000; 1/6) = \\ &= \frac{6000!}{1000!(6000 - 1000)!} (1/6)^{1000} (1 - 1/6)^{5000} \end{aligned}$$

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .
- $n = 6000$  là quá lớn, việc tính theo mô hình nhị thức không khả thi, vì

$$P(X = 1000) = P_{6000}(1000; 1/6) =$$

$$= \frac{6000!}{1000!(6000 - 1000)!} (1/6)^{1000} (1 - 1/6)^{5000}$$

- Sử dụng định lý giới hạn đa phương de Moivre- Laplace, có xấp xỉ

$$\begin{aligned} P(X = 1000) &= \frac{1}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times (1 - 1/6)}} \varphi(0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times (1 - 1/6)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.01909859 \end{aligned}$$

# Định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace

## Định lý

Xét một dãy phép thử Bernoulli có xác suất thành công  $p \in (0, 1)$ .  $X$  là số phép thử thành công. Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(k_1 < X < k_2\right) = \Phi(x_{k_2}) - \Phi(x_{k_1})$$

ở đây

## Tích phân Laplace

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2}; \quad x_{k_j} = \frac{k_j - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad j = 1, 2$$

# Giải thích

- Hàm  $\Phi(x)$  là hàm phân phối xác suất của luật chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ , được gọi là tích phân Laplace.

# Giải thích

- Hàm  $\Phi(x)$  là hàm phân phối xác suất của luật chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ , được gọi là tích phân Laplace.
- Các giá trị của hàm  $\Phi(x)$  được tính ở bảng tích phân Laplace.



# Giải thích

- Hàm  $\Phi(x)$  là hàm phân phối xác suất của luật chuẩn chính tắc  $N(0,1)$ , được gọi là tích phân Laplace.
- Các giá trị của hàm  $\Phi(x)$  được tính ở bảng tích phân Laplace.
- Giá trị  $x_{k_j} = \frac{k_j - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ,  $j = 1, 2$ .

# Định lý giới hạn tích phân de Moivre-Laplace

## Ví dụ

Gieo 60 lần một con xúc xắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để số lần xuất hiện mặt "lục" trong khoảng (10, 15)

ở đây

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .
- $n = 60$  là lớn, việc tính theo công thức nhị thức không khả thi, vì

$$P_{60}(10 \leq X \leq 15; 1/6) =$$

$$= \sum_{k=10}^{15} \frac{60!}{10!(60-10)!} (1/6)^k (1 - 1/6)^{15-k}$$

## Giải:

- Xác suất xuất hiện mặt "lục" là  $p = \frac{1}{6}$ .
- $n = 60$  là lớn, việc tính theo công thức nhị thức không khả thi, vì

$$P_{60}(10 \leq X \leq 15; 1/6) =$$

$$= \sum_{k=10}^{15} \frac{60!}{10!(60-10)!} (1/6)^k (1 - 1/6)^{15-k}$$

- Sử dụng định lý giới hạn địa phương de Moivre- Laplace, có xấp xỉ

$$P\left(10 \leq X \leq 15\right) = \Phi\left(\frac{15 - 60 \cdot 1/6}{\sqrt{60 \cdot 5/36}}\right) - \Phi(0) =$$

$$= \Phi(1.732051) - 0 = 0.9582$$

# Định lý giới hạn trung tâm

## Định lý

Giả sử  $X_1, X_2, \dots$  là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng  $E(X_j) = \mu$ ,  $D(X_j) = \sigma^2 < +\infty$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x)$$

ở đây

## Tích phân Laplace

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

# Giải thích

- Khẳng định phân phối chuẩn chính tắc  $\Phi(x)$  là giới hạn của phân phối của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn

# Giải thích

- Khẳng định phân phối chuẩn chính tắc  $\Phi(x)$  là giới hạn của phân phối của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn
- Khẳng định khi  $n$  lớn, có

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} < x\right) \approx \Phi(x)$$

với  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$



# Giải thích

- Khẳng định phân phối chuẩn chính tắc  $\Phi(x)$  là giới hạn của phân phối của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn
- Khẳng định khi  $n$  lớn, có

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} < x\right) \approx \Phi(x)$$

với  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

- Là cơ sở cho mô phỏng Monte Carlo và khoảng tin cậy cho các tham số của tổng thể

## 4.3 Luật yếu các số lớn

### Luật Bernoulli, 1713

Thực hiện  $n$  phép thử độc lập, có  $k$  phép thử thành công với xác suất thành công là  $p$ . Khi đó, với  $n$  lớn

$$\frac{k}{n} \approx p$$

# Giải thích

- Tỷ lệ bé trai và bé gái xấp xỉ 0.5 khi  $n$  lớn

# Giải thích

- Tỷ lệ bé trai và bé gái xấp xỉ 0.5 khi  $n$  lớn
- Tần suất  $f_n = \frac{k}{n}$  là ước lượng không chệch và vững của xác suất  $p$

## 4.3 Luật yếu các số lớn

### Bất đẳng thức Chebyshev

Với mọi biến ngẫu nhiên  $X$  có  $E(X) = \mu$  và  $D(X) = \sigma^2 < +\infty$ . Khi đó

$$P\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sigma^2$$

# Giải thích

- Bất đẳng thức  $3 - \sigma$  và ứng dụng trong thống kê (so sánh với định lý giới hạn tích phân)

# Giải thích

- Bất đẳng thức 3 –  $\sigma$  và ứng dụng trong thống kê (so sánh với định lý giới hạn tích phân)
- Dạng tương đương

$$P\left(|X - \mu| \leq \epsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \sigma^2$$

# Luật yếu các số lớn

## Luật yếu số lớn Chebyshev

Giả sử  $X_1, X_2, \dots$  là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phương sai hữu hạn bởi cùng một hằng số. Khi đó, với  $n$  lớn

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \simeq \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n}$$



# Luật yếu các số lớn

## Luật yếu số lớn Khinchin

Giả sử  $X_1, X_2, \dots$  là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối và  $E(X_n) = \mu$ . Khi đó, với  $n$  lớn

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \simeq \mu$$

- ứng dụng trong vật lý

# Giải thích

- ứng dụng trong vật lý
- ứng dụng trong thống kê

## Bài tập chương 4

### Bài tập 1.

Xác suất một lọ thuốc bị vỡ khi vận chuyển từ nơi sản xuất tới nơi tiêu thụ là 0.01.

- 1 Dùng định lý xấp xỉ Poisson tính xác suất có đúng 5 lọ thuốc bị vỡ khi vận chuyển 300 lọ thuốc.
- 2 Phải vận chuyển bao nhiêu lọ thuốc cùng loại để xác suất có ít nhất một lọ thuốc bị vỡ không bé hơn 0.999

## Bài tập chương 4

### Bài tập 2.

Gieo 30 lần một con xúc xắc cân đối đồng chất. Gọi  $X$  là số điểm sau 30 lần gieo con xúc xắc.

- 1 Tính  $E(X)$  và  $D(X)$
- 2 Tính xác suất  $P(X > 120)$

## Bài tập chương 4

### Bài tập 3.

Trong kho có 100 thùng sản phẩm, trong mỗi thùng có 90 chính phẩm và 10 phế phẩm. Mỗi thùng hàng lấy ra (có hoàn lại) kiểm tra 5 sản phẩm. Tính xác suất để tổng số phế phẩm thuộc khoảng  $(40; 55)$

## Bài tập chương 4

### Bài tập 4.

Gieo 3200 lần một đồng tiền có xác suất xuất hiện mặt sấp là 0.519. Gọi  $X$  là số lần sấp xuất hiện sau 3200 lần gieo.

- 1 Tính số lần sấp có khả năng xuất hiện nhất.
- 2 Tính xác suất tương ứng.
- 3 Tính xác suất  $P(1600 + 5\sqrt{2} < X < 1600 + 10\sqrt{2})$ .

## Bài tập chương 4

### Bài tập 5.

Gọi  $X$  là số người vào một hiệu cắt tóc trong khoảng thời gian 30 phút. Giả sử  $X$  có phân phối Poisson với tham số  $\lambda = 2$ .

- 1 Hỏi trung bình có bao nhiêu người vào cắt tóc trong 30 phút.
- 2 Tính xác suất  $P(E(X) - \sqrt{D(X)} \leq X < E(X) + \sqrt{D(X)})$ .