Anh hưởng của khe hở bán kính tới quỹ đạo tâm trục ổ đầu to thanh truyền của động cơ 5S-FE

Influence of the Radial Clearance on the Center Orbit of the 5S-Fe Engine's Connecting-Rod Big End Bearing

Nguyễn Đình Tân ^{1*}, Trần Thị Thanh Hải ², Lưu Trọng Thuận ²

¹Trường Cao Đẳng Điện Tử Điện Lạnh Hà Nội - Ngõ 86, Chùa Hà, Cầu Giấy, Hà Nội ² Trường Đại học Bách khoa Hà Nội – Số 1, Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội Đến Tòa soạn: 31-01-2018; chấp nhận đăng: 28-9-2018

Tóm tắt

Ô đầu to thanh truyền là phần kết nối giữa thanh truyền và trục khuỷu, chịu tải trọng thay đổi theo chu kỳ làm việc của động cơ. Do đó các đặc tính bôi trơn ổ đầu to thanh truyền thay đổi theo chu kỳ làm việc của động cơ. Độ lệch tâm giữa tâm trục và tâm thanh truyền (bạc của ổ) là một trong những đặc tính bôi trơn quan trọng, ảnh hưởng trực tiếp tới chiều dày màng dầu bôi trơn. Bài báo trình bày một mô phỏng số quỹ đạo tâm trục khuỷu ổ đầu to thanh truyền động cơ 5S-FE khi thay đổi khe hở bán kính trên cơ sở giải phương trình Reynolds biến đổi ở chế độ thủy động và phương trình cân bằng tải bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Kết quả mô phỏng được so sánh với kết quả tính toán từ phần mềm ACCEL (phần mềm do nhóm nghiên cứu của Đại học Poiters, Cộng hòa Pháp viết cho các hãng xe hơi để giải quyết bài toán bôi trơn cho ổ thanh truyền).

Từ khóa: Ở đầu to thanh truyền, bôi trơn thủy động, phương trình Reynolds, độ lệch tâm, ACCEL

Abstract

The connecting-rod big end bearing is the connecting part between the connecting-rod and the crankshaft, subject to varying loads according to the operation cycle of the engine. Therefore, the lubrication characteristics of the connecting-rod big end bearing vary according to the operation cycle of the engine. Eccentricity between the journal center and center of the connecting-rod (housing bearing) is one of the important lubricating properties that directly affect the oil film thickness. The article presents a numerical simulation the journal's center orbit of 5S-FE engine's connecting-rod big end bearing when changing the radial clearance base on the solving of the modified Reynolds equation in the hydrodynamic regime and equilibrium of the charge equation by the finite element method. Simulation results were compared with the results from the ACCEL software (the software is developed by the University of Poitiers' in France for car manufacturing to solve the problem of connecting rod lubrication).

Keywords: Connecting-rod big end bearing, hydrodynamic lubrication, Reynolds equation, Eccentricity, ACCEL

1. Giới thiệu

Tuổi thọ và độ tin cậy của cụm trục khuỷu-thanh truyền trong động cơ đốt trong phụ thuộc rất nhiều vào chế độ bôi trơn. Thanh truyền là một trong các bộ phận quan trọng của động cơlàm việc trong điều kiện khắc nghiệt (tải trọng lớn và thay đổi liên tục, vận tốc lớn). Do vậy, việc nghiên cứu đặc tính bôi trơn ổ đầu to thanh truyền trong quá trình làm việc đang được các nhà khoa học và các nhà sản xuất hết sức quan tâm. Một trong các đặc tính bôi trơn quan trọng của ổ đầu to thanh truyền tác động trực tiếp tới chiều dầy màng dầu đó là quỹ đạo vị trí cân bằng của tâm trục khi tải trọng thay đổi.

Năm 1971, J.F.Booker [1] tiếp cận bài toán bôi trơn ô đầu to thanh truyền động cơ chịu tải trọng thay đối bằng phương pháp Mobility, kết quả đưa ra quỹ đạo vị trí cân bằng của tâm trục khi tải trọng thay đổi. Năm 1983, Fantino và cộng sự [2] đã tính toán quỹ đạo tâm trục trong ổ thanh truyền trong trường hợp chịu tải trọng động. Ô đầu to thanh truyền được xem là ổ ngắn đàn hồi. Tác giả đã so sánh chiều dày màng dầu và mômen ma sát giữa thanh truyền tuyệt đối cứng và thanh truyền đàn hồi. Năm 1985, K.P.Oh và P.K.Goenka [3] ứng dụng phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp lặp Newton-Raphson kết hợp với thuật toán Murty mô phỏng bôi trơn của ổ đầu to thanh truyền chịu tải trọng động, kết quả đã đưa ra phân bố áp suất và chiều dày màng dầu thay đổi theo thời gian. Năm 1988, Mcivor và Fenner [4] đã nghiên cứu áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn cho ổ chịu

^{*} Địa chỉ liên hệ: Tel.: (+84) 978263926 Email: hai.tranthithanh@hust.edu.vn

tải trọng động, kết quả chỉ ra việc sử dụng loại phần tử khác nhau dẫn tới thời gian tính toán khác nhau. Các tác giả đã so sánh hai loại phần tử: phần tử tứ giác với 8 nút và phần tử tam giác với 3 nút. Kết quả tính toán cho thấy, với phần tử 8 nút nhanh hơn. Năm 1992 Fenner và cộng sự [5] đã sử dụng đa giác lưới 8 nút khi phân tích màng dầu để nghiên cứu về ổ chịu tải trọng nặng. Sự biến dang đàn hồi làm tăng đáng kế pham vi và chiều dày của màng dầu và dẫn đến giảm đáng kể áp lực lớn nhất trong tiếp xúc. Trong một nghiên cứu khác Wang và công sự [6], đã xác định hiệu suất của ổ đầu to thanh truyền với hình dang không tròn. Họ sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để giải phương trình Reynolds. Quỹ đạo tâm thanh truyền, chiều dày màng dầu và áp lực màng dầu trong chu kỳ được tính toán và kết quả được so sánh với mô hình ổ đầu to thanh truyền đàn hồi nguyên khối. Năm 2001, Bonneau và Hajjam [7] đã đưa ra thuật toán dựa trên mô hình của JFO (Jakobson-Floberg và Olsson) và rời rạc các phương trình bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Thuật toán này cho phép xác định vùng gián đoạn và tái tạo của màng dầu. Các tác giả đưa ra một phương trình Reynolds sửa đổi có thể áp dụng cho cả vùng liên tục và vùng gián đoạn của màng dầu. Các kết quả tính toán ổ đầu to thanh truyền của động cơ F1 bao gồm phân bố áp suất, chiều dầy màng dầu, quỹ đạo tâm trục khuỷu, vận hành trong điều kiện khắc nghiệt được đưa ra.

Trong bài báo này các tác giả trình bày một mô phỏng sốquỹ đạo tâm trục của ổ đầu to thanh truyền động cơ 5S-FE chịu tải trọng động với điều kiện biên Reynolds, có tính đến hiện tượng gián đoạn màng dầu.

2. Phương trình Reynolds biến đối

Phương trình Reynolds cho một ổ đỡ chịu tải trọng động được viết như sau [8]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}$$
(1)

Trong đó h là chiều dày màng dầu, p là áp suất thủy động, μ là độ nhớt động lực học của dầu bôi trơn.

Phương trình (1) được giải cùng với điều kiện biên Reynolds có tính tới hiện tượng gián đoạn màng dầu (Hình 1). Trong miền khai triển màng dầu Ω bao gồm vùng làm việc (vùng màng dầu liên tục) và vùng màng dầu bị gián đoạn

- Vùng liên tục Ω có p> p_{cav} (p_{cav} là hẳng số) là vùng mà bề mặt trục và bạc được phân cách hoàn toàn bởi màng dầu bôi trơn.

- Vùng gián đoạn Ω_0 có p= p_{cav} là vùng có xen lẫn các lỗ khí. Tại vùng này bề mặt trục và bạc được phân cách bởi hỗn hợp dầu bôi trơn – khí.



Hình 1. Miền khai triển ổ

Tại vùng gián đoạn phương trình (1) được viết lại dưới dạng:

$$U\frac{\partial\rho h}{\partial x} + 2\frac{\partial\rho h}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Trong đó ρ là khối lượng riêng của hỗn hợp dầu bôi trơn - khí

Đặt
$$r = \frac{\partial \rho h}{\rho_0}$$
 là chiều dày của màng hồn hợp

dầu bôi trơn – khí, với ρ_0 là khối lượng riêng của hồn hợp dầu bôi trơn – khí, phương trình (2) trở thành:

$$U\frac{\partial r}{\partial x} + 2\frac{\partial r}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

Giữa các vùng Ω và Ω_0 là các đường biên Ω^+ và Ω^- tại đây bắt đầu xảy ra hiện tượng gián đoạn và phục hồi màng bôi trơn. Như vậy, để xác định được phân bố áp suất và tìm ra vùng gián đoạn của màng dầu phải giải hệ hai phương trình (1) và (3) với hai ẩn số là p và r. Bonneau và Hajjam [8] đã đưa ra ẩn số D đại diện cho cả hai biến trên trong hai miền liên tục và gián đoạn:

- Đối với vùng màng dầu liên tục

$$\begin{cases} D = p, D \ge 0\\ F = 1 \end{cases}$$
(4)

- Đối với vùng gián đoạn

$$\begin{cases} D = r - h, D < 0 \ (\rho < \rho_0) \\ F = 0 \end{cases}$$
(5)

Như vậy hai phương trình (1) và (3) được viết dưới dạng:

$$F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^{3}}{12\mu}\frac{\partial D}{\partial x}\right) + F\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^{3}}{12\mu}\frac{\partial D}{\partial z}\right) = U\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + +(1 - F)\left(\frac{U}{2}\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial t}\right)$$
(6)

Chiều dày màng dầu:

Chiều dày màng dầu h trong ổ bạc tròn và cứng như hình 2 được xác định như sau:

$$h = C - e_{xe}\cos\theta - e_{ye}\sin\theta \tag{7}$$

Trong phương trình này C= R_c - R_a (khe hở hướng kính), e_x , và e_y là tọa độ của tâm trục O_a .

 θ =x/R là vị trí góc của một điểm M. Biến đổi phương trình (7) về dạng:

$$h = C \left(1 - \varepsilon_{xe} \cos\theta - \varepsilon_{ye} \sin\theta \right) \tag{8}$$

Trong đó $\varepsilon_{xe}=e_{xe}/C$, $\varepsilon_{ye}=e_{ye}/C$ là độ lệch tâm tương đối theo các trục tọa độ của tâm trục.



Hình 2. Mặt cắt ổ đầu to thanh truyền

Phương trình cân bằng tải:

Bỏ qua lực quán tính, phương trình cân bằng lực tác dụng lên thanh truyền như sau:

$$\overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_p} = \overrightarrow{F_{ext}} + \int_S \ p\overrightarrow{n} \, dS = \overrightarrow{0} \tag{9}$$

Trong đó F_{ext} là ngoại lực, F_p là lực thủy động sinh ra, \vec{n} là vec-tơ pháp tuyến của bề mặt bạc.

Chiếu phương trình (9) lên hai trục X_e , Y_e ta được hệ phương trình cân bằng tải:

$$\begin{cases} \int_{S} p \cos\theta dS - F_{xe} = 0\\ \int_{S} p \sin\theta dS - F_{ye} = 0 \end{cases}$$
(10)

3. Mô hình hóa

Phương trình Reynolds:

Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạnGalerkin cho phương trình (6) trên miền khai triển (Hình 1) ta có:

$$E(D) = \int_{\Omega} W(-F\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^{3}}{12\mu}\frac{\partial D}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^{3}}{12\mu}\frac{\partial D}{\partial z}\right)\right) + U\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + (1-F)\left(\frac{U}{2}\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\Omega = 0$$
(11)

O đây W là các hàm trọng số.

Sử dụng công thức tích phân từng phần cho phương trình (11):

$$E(D) = \int_{\Omega} F\left(\frac{\partial W}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial D}{\partial x}\right) + \frac{\partial W}{\partial z}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial D}{\partial z}\right)\right) + W(U\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}) + (1 - F)(\frac{U}{2}\frac{\partial W}{\partial x}D) + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} (1 - -F)WDd\Omega = 0 \quad (12)$$

Ở đây W=N (N là các hàm nội suy)

Phương trình (12) được viết dưới dạng hệ phương trình:

$$R = [M] D + B = 0$$
 (13)

Trong đó và:

$$M_{jk} = \sum_{n=1}^{ne} \sum_{m=1}^{npg} \left(\frac{h^3}{6\mu} \sum_{k=1}^{nne} \left(\frac{\partial N_{mj}}{\partial x} \frac{\partial N_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial N_{mj}}{\partial z} \frac{\partial N_{mk}}{\partial z}\right) F_k + \sum_{k=1}^{nne} \frac{\partial N_{mj}}{\partial x} N_{mk} (1 - F_k) - 2 \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{nne} N_{mj} N_{mk} (1 - -F_k(t))) \Delta \Omega_m$$
(14)

$$B_{j} = \sum_{n=1}^{ne} \sum_{m=1}^{npg} (N_{mj} (U \frac{\partial h_{m}}{\partial x} + 2 \frac{h_{m}(t) - h_{m}(t - \Delta t)}{\Delta t}) - 2 \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{nne} N_{mj} N_{mk} ((1 - F_{k}(t - \Delta t))D_{k}(t - \Delta t))) \Delta \Omega_{m}$$
(15)

Trong miền liên tục $F_k=1$, khi đó ta có:

$$M_{jk} = \sum_{n=1}^{ne} \sum_{m=1}^{npg} \left(\frac{h^3}{6\mu} \sum_{k=1}^{nne} \left(\frac{\partial N_{mj}}{\partial x} \frac{\partial N_{mk}}{\partial x} + + \frac{\partial N_{mj}}{\partial z} \frac{\partial N_{mk}}{\partial z}\right) F_k$$
(16)

$$B_j = \sum_{n=1}^{ne} \sum_{m=1}^{npg} (N_{mj} (U \frac{\partial h_m}{\partial x} + 2 \frac{h_m(t) - h_m(t - \Delta t)}{\Delta t}))$$
(17)

Phương trình cân bằng tải:

$$\begin{cases} \int_{S} < p_{i} > N_{i} \cos\theta dS - F_{xe} = 0\\ \int_{S} < p_{i} > N_{i} \sin\theta dS - F_{ye} = 0 \end{cases}$$
(18)

4. Kết quả

Thông số ổ đầu to thanh truyền

Ô đầu to thanh truyền có các thông số hình học cho trong bảng 1.

Bảng 1. Thông số ổ đầu to thanh truyền

Đường kính bạc	Đường	kính	trục	Khe	hở	bán
(D _c)	(D_a)			kính ((C)	
26,029	26,005			0,024	-	
26,043	26,005			0,038		
26,060	26,005			0,055	í	

Tải tác dụng

Tải tác dụng trong chu kỳ làm việc của động cơ 5S-FE lên ổ đầu to thanh truyền (Hình 3) được đo trên máy MEGAPASCALE (thiết bị thực nghiệm bôi tron ổ đâu to thanh truyền Đại học Poitiers, Cộng hòa Pháp) ở tốc độ n=3000 vg/ph và chế độ 30% tải. Tải bao gồm hai thành phần: Thành phần kéo, nén F_x , và thanh phần uốn F_y .



Hình 3. Tải tác dụng lên ổ đầu to thanh truyền

Dầu bôi trơn

Trong nghiên cứu này, các tác giả sử dụng dầu Shell Rimula R2 Extracho động cơ 5S-FE, là dầu đa cấp có chứa các phụ gia tăng chỉ số độ nhớt, phụ gia chống mài mòn, phụ gia chống tạo cặn, phụ gia phân tán loại bỏ bụi bẩn và làm sạch động cơ. Các thông số kỹ thuật của dầu bôi tron RIMULA R2 EXTRA trình bày trong bảng 2.

Bảng 2. Đ)ặc tính	dâu Shell	Rimula	R2 Extra
-----------	----------	-----------	--------	----------

Cấp độ nhớt	20W-50	Đơn vị
Độ nhớt động học tại: 40°C	162	CSt
100°C	18,9	
Chỉ số độ nhớt	134	
Tỉ trọng ở 15°C	0,893	Kg/l

Kết quả mô phỏng

Hình 4 biểu diễn quỹ đạo của tâm trục quanh tâm thanh truyền thông qua độ lệch tâm tương đối theo một chu kỳ tải khi khe hở bán kính C=24µm. Tại đầu kỳ hút, tương ứng với góc 0° của trục khuỷu độ lệch tâm tương đối $\varepsilon_{x,0}^{\circ}$ = - 0.6656, $\varepsilon_{y,0}^{\circ}$ = - 0.3895. Nửa đầu kỳ hút, lực F_x< 0 có giá trị tuyệt đối giảm, lực F_y< 0 có giá trị tuyệt đối tăng do đó tâm trục chuyển động về phía góc phần tư thứ II: $\varepsilon_{x,80}^{\circ}$ =0.5842,

 $\epsilon_{y,80}^{\circ}=$ - 0.4075. Nửa sau của kỳ hút, lực $F_x>0$ có giá trị tăng, lực $F_y<0$ có giá trị tuyệt đối giảm, tâm trục dịch chuyển lên góc phần tư thứ III: $\epsilon_{x,180}^{\circ}=0.5842$, $\epsilon_{y,180}^{\circ}=$ - 0.4075. Nửa đầu kỳ nén, lực $F_x>0$ có giá trị giảm, lực $F_y>0$ có giá trị tăng, tâm trục dịch chuyển sang góc phần tư thứ IV: $\epsilon_{x,310}^{\circ}=$ - 0.5024,

 $\varepsilon_{y,310}^{\circ} = 0.5920$. Nửa cuối kỳ nén, lực $F_x > 0$ có giá trị tăng, lực $F_y > 0$ có giá trị giảm, tâm trục dịch chuyển quay lại góc phần tư thứ III: $\varepsilon_{x,370}^{\circ} = 0.8200$,

 $\epsilon_{y,370}^{o} = 0.3304$. Nửa đầu kỳ nổ, lực $F_x > 0$ có giá trị giảm, lực $F_y < 0$ có giá trị tuyệt đối tăng, tâm trục

chuyển động sang góc phần tư thứ II: $\varepsilon_{x,420}^{\circ} = 0.8036$, $\varepsilon_{y,420}^{\circ} = -4.0750e-3$. Nửa sau kỳ nổ, lực $F_x > 0$ có giá trị giảm, lực $F_y < 0$ có giá trị tuyệt đối giảm, tâm trục chuyển động quay lại góc phần tư thứ III:

 $\varepsilon_{x,540}^{\circ} = 0.6796$, $\varepsilon_{y,540}^{\circ} = 0.4200$. Nửa đầu kỳ xả, lực $F_x > 0$ có giá trị giảm, lực $F_y > 0$ có giá trị tăng, tâm trục chuyển động sang góc phần tư thứ IV:

 $\varepsilon_{x,640}^{\circ} = -0.3334$, $\varepsilon_{y,640}^{\circ} = 0.7578$. Nửa cuối kỳ xả, lực $F_x < 0$ có giá trị tuyệt đối tăng, lực $F_y > 0$ có giá trị giảm, tâm trục chuyển động sang góc phần tư thứ I: $\varepsilon_{x,720}^{\circ} - 0.6656$, $\varepsilon_{y,720}^{\circ} = -0.3895$.



Hình 4. Quỹ đạo tâm trục khi C=24µm



Hình 5. Sự thay đổi của quỹ đạo tâm trục khi thay đổi khe hở bán kính

Hình 5 biểu diễn quỹ đạo của tâm trục quanh tâm thanh truyền tại các khe hở bán kính khác nhau. Khi tăng khe hở bán kính thì quỹ đạo tâm trục có dạng tương đồng nhau tuy nhiên nó có xu hướng dịch chuyển về phía có $\varepsilon_x \approx 1$: $\varepsilon_{x,370}^\circ = 0.8200$, $\varepsilon_{y,370}^\circ = 0.3304$.

Hình 6 so sánh độ lệch tâm của ổ đầu to thanh truyền tính toán số và kết quả tính từ phần mềm ACELL. Theo đó, dạng đường cong biểu diễn độ lệch tâm của hai kết quả có sự tương đồng. Tuy nhiên đường cong độ lệch tâm trong ACCEL có xu hướng chuyển dịch sang bên trái và bị elip hóa. Độ lệch tâm trong trường hợp này có giá trị lớn hơn 1 do biến dạng đàn hồi, biến dạng nhiệt tạo ra những vị trí có khe hở lớn hơn khe hở bán kính.



Hình 6. So sánh quỹ đạo tâm trục khi tính toán mô phỏng và khi dùng phần mềm ACCEL với C=24µm

5. Kết luận

Bài báo mô phỏng quỹ đạo của tâm trục quanh tâm thanh truyền theo một chu kỳ tải của động cơ 5S-FE.Quỹ đạo là một đường cong khép kín bắt đầu từ 0° của trục khuỷu, độ lệch tâm tương đối $\varepsilon_{x,0}^{0} = -0.6656$, $\varepsilon_{y,0}^{0} = -0.3895$ thuộc góc phần tư thứ I. Sau đó tâm trục dịch chuyển theo thứ tự các góc phần tư I-II-III-III-III-IV khi tải tác dụng thay đổi.Khi tăng khe hở hương kính thì quỹ đạo tâm trục có dạng tương đồng nhau tuy nhiên nó có xu hướng dịch chuyển về phía có $\varepsilon_x \approx 1$. Quỹ đạo của tâm trục cũng có dạng tương đồng với kết quả tính bằng phần mềm ACCEL, độ lệch tâm tại một số vị trí có giá trị lớn hơn 1 do biến dạng đàn hồi, biến dạng nhiệt tạo ra những vị trí có khe hở lớn hơn khe hở bán kính.

References

- J.F.Booker, Dynamically-Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method, Journal of Lubrication Technology, Volume 93(1974).
- [2] FANTINO B., GODET M., FRENE J., Dynamic Behaviour of an Elastic Connecting–Rod Bearing – Theoretical Study, SAE Technical Paper, N° 830307, p. 23-32, 1983.
- [3] GOENKA, P.K., Dynamically Loaded Journal Bearings: Finite Element Method Analysis, Transaction of the ASME, Journal of Lubrication Technology, vol. 106, p. 429-439.
- [4] MCIVOR J.D.C., FENNER D.N., An evolution of eight-node quadrilateral finite elements for the analysis of a dynamically loaded hydrodynamic journal bearing, Proc. Inst. Mech. Engrs., vol. 202, p. 95-101, 1988.
- [5] FENNER D. N., MCIVOR J. D. C., CONWAY-JONES J. M., XU H., The effect of compliance on peak oil film pressure in connecting rod bearings, Proc. 19th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Leeds, September 1992
- [6] WANG D., KEITH G., YANG Q., Lubrication analysis of a connecting-rod bearing in a high-speed engine. Part I: Rod and bearing deformation, STLE Tribology Transaction, Vol. 47, p. 280-289, 2004.
- [7] BONNEAU D., HAJJAM M., Modélisation de la rupture et de la réformation des films lubrifiants dans les contacts élastohydrodynamiques, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 10, p. 679-704, 2001.
- [8] Reynolds, O., On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1886.