### Tổng hợp đường lăn của hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh

Pitch Line Synthesis of Noncircular Planetary Gears

### Nguyễn Hồng Thái <sup>1\*</sup>, Nguyễn Thành Trung <sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Bách khoa Hà Nội - Số 1 Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội <sup>2</sup> Viện Nghiên cứu cơ khí, Bộ Công thường - Số 4 Phạm Văn Đồng, Cầu Giấy, Hà Nội Đến Tòa soạn: 11-8-2018; chấp nhận đăng: 20-01-2020

### Tóm tắt

Trong quá trình thiết kế hệ bánh răng không tròn, tổng hợp đường lăn của các bánh răng trong hệ nhằm đảm bảo hệ bánh răng ăn khớp đúng hàm truyền là một trong những bước quan trọng. Vì vậy, trong nghiên cứu này các tác giả trình bày một phương pháp tổng hợp đường lăn mới của hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh trên cơ sở biết trước đường lăn của bánh răng vệ tinh. Ngoài ra, nghiên cứu cũng đã xác định được điều kiện để đương lăn của bánh răng trung tâm thứ hai bao được hệ bánh hành tinh khuyết phía trong mà các nghiên cứu trước đây đều phải dựa vào kinh nghiệm. Đồng thời nghiên cứu này cũng đã đưa ra quy trình tổng hợp đường lăn của hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh đầy đủ.

Từ khóa: Bánh răng không tròn, hệ bánh không tròn kiểu hành tinh, hệ bánh răng hành tinh, đường lăn.

#### Abstract

During process of designing noncircular planetary gearing system, one of the most important tasks is synthesis of pitch lines of the gears with condition of preserving correct transmission function. In this work, the authors present a method for synthesizing pitch lines of the noncircular planetary gearing system based on given pitch line of the planetary gear. In comparison with previous experience-based methods, this work also sets the condition for the pitch line of the second sun gear, which will cover all the inside planetary gears. Moreover, the authors propose a synthesizing process of the pitch lines of the noncircular planetary gearing system.

Keywords: noncircular gears, noncircular planetary gears, planetary gear train, pitch lines.

#### 1. Đặt vấn đề

Người đưa ra ý tưởng đầu tiên về thiết kế và ứng dụng bánh răng không tròn (BRKT) là Giovanni Dondi (1330-1388) nhà chế tác đồng hồ người Ý. Thiết kế đầu tiên của BRKT được ông giới thiệu đầy đủ trong bản thảo "Tractatus Astrarii" và được ứng dụng trong thiết kế đồng hồ thiên văn vô cùng tinh sảo và phức tạp [1]. Năm 1410 lần đầu tiên, đồng hồ thiên văn chế tạo theo thiết kế của Giovanni Dondi đã được lắp đặt tại Praha, Cộng hòa Séc cho đến nay vẫn còn hoạt động và được coi là đồng hồ thiên văn cổ nhất trên thế giới. Hơn một thế kỷ sau, BRKT lại được nhà bác học Leonardo Da Vinci nghiên cứu ứng dụng trong thiết kế, chế tạo máy móc và thiết bị như: đồng hồ, nhạc cụ, các công cụ tự động, máy làm chìa khóa chuyên dụng, cơ cấu Manto, bom.v.v.. Những thiết kế này đã được lưu lại và xuất bản chính thức vào năm 1493 [2]. Cho đến những năm gần đây với sự phát triển của các máy gia công điều khiển số hiện đại, gia công có độ chính xác cao cùng với sự xuất hiện của các phương pháp gia công mới, cũng như sự phát triển của nền công nghiệp sản xuất phụ trợ đã làm giá thành sản xuất BRKT tiệm cân với giá thành

sản xuất bánh răng có tỷ số truyền không đổi truyền thống. Đây là động lực cho việc nghiên cứu và phát triển các loại BRKT trong đó phải kể đến Boyd (1940) đã nghiên cứu thiết kế bộ điều khiển cơ khí bằng hệ bánh răng elip thường [3], Dooner và các đồng nghiệp đề xuất sử dụng bốn cặp BRKT tạo thành một hệ thường kết hợp với hệ bánh răng có tỷ số truyền không đổi để chế tạo hộp biến đổi tốc độ vô cấp CVT cho động cơ đốt trong có công suất 200 HP [4], năm 2011 Zheng và đồng nghiệp lại tiếp tục nghiên cứu phát triển hoàn thiện hơn về các bộ CVT đời mới này [5], hay một hướng nghiên cứu khác đó là ứng dụng bánh răng không tròn trong thiết kế cơ cấu đánh lái của ô tô [6, 7]. Ngoài những nghiên cứu ứng dụng kể trên còn có các nghiên cứu về thiết kế, chế tạo như [8 - 10] v.v.. Tuy nhiên, các nghiên cứu thường tập trung vào thiết kế một cặp BRKT [11, 12], hoặc là các hệ BRKT thường [13], còn hệ BRKT kiểu hành tinh có rất ít công trình nghiên cứu. Mặt khác, việc thiết kế đường lăn là một trong những bước thiết kế đầu tiên để hình thành một hệ BRKT đã được Litvin [13] và D. Mundo [14] đề cập đến. Nhưng Litvin tập trung nghiên cứu về hệ BRKT thường, còn D. Mundo đã thiết lập các điều kiện phục vụ cho thiết kế các hệ BRKT kiểu hành tinh đầy đủ khi biết trước hàm truyền và khoảng cách trục của một cặp, từ đó suy ra các cặp còn lại. Với phương pháp của Mundo

<sup>\*</sup> Địa chỉ liên hệ: Tel.: (+84) 913530121 Email: thai.nguyenhong@hust.edu.vn

việc xác định các tham số thiết kế phải dựa trên kinh nghiệm của người thiết kế nhằm đảm bảo đường lăn của bánh răng trung tâm ngoài bao toàn bộ cặp bánh răng hành tinh khuyết phía trong. Để khắc phục nhược điểm trên của Mundo trong bài báo này các tác giả trình bày một phương pháp tổng hợp đường lăn mới và đưa ra các điều kiện biên làm cơ sở khoa học cho việc xác định các tham số này.

### 2. Cơ sở lý thuyết thiết kế đường lăn của cặp bánh răng không tròn khi biết trước một đường lăn

## 2.1. Thiết kế đường lăn của cặp BRKT ăn khớp ngoài khi biết trước một đường lăn

Nếu gọi:  $\Sigma^{l}$  là đường lăn của bánh răng 1 với giả thiết đường lăn được cho trước;  $P_{l}$  là điểm bất kỳ trên  $\Sigma^{l}$  tại thời điểm thứ *i*;  $\rho_{P_{l}}(\varphi_{1})$  là khoảng cách từ  $P_{l}$  đến O<sub>1</sub> tâm quay của bánh răng 1;  $\varphi_{1}$  là góc hợp bởi  $O_{l} P_{l}$  với  $O_{l}O_{2}$  được mô tả trên Hình 1.



Hình 1. Xác định đường lăn đối tiếp của cặp BRKT ăn khớp ngoài

Như vậy, sau khi bánh răng 1 quay đi một góc  $\varphi_1$  để đưa điểm  $P_1$  về trùng với P (tâm ăn khớp) trên  $O_1O_2$  theo [15] thì tương ứng đối tiếp với điểm  $P_1$  ta sẽ có một điểm  $P_2$  trên  $\Sigma^2$  đường lăn của bánh răng 2 lăn không trượt đối tiếp với bánh răng 1;  $\rho_{P_2}(\varphi_2)$  là khoảng cách từ  $P_2$  trên  $\Sigma^2$  đến tâm quay  $O_2$  của bánh răng 2;  $\varphi_2(\varphi_1)$  là góc hợp bởi  $O_2P_2$  với  $O_1O_2$ ;  $a_{12} = O_1O_2$  là khoảng cách hai tâm quay. Như vậy, ta có:

$$\rho_{P_2}(\varphi_2(\varphi_1)) = a_{12} - \rho_{P_1}(\varphi_1) \tag{1}$$

Tỷ số truyền của cặp BRKT được cho bởi:

$$i_{12}(\varphi_1) = \frac{\rho_{P_2}(\varphi_2(\varphi_1))}{\rho_{P_1}(\varphi_1)} = \frac{a_{12} - \rho_{P_1}(\varphi_1)}{\rho_{P_1}(\varphi_1)}$$
(2)

Lấy tích phân công thức (2) theo góc quay  $\varphi_1$  của bánh răng l ta có góc cực  $\varphi_2(\varphi_1)$ :

$$\varphi_{2}(\varphi_{1}) = \int_{0}^{\varphi_{1}} \left( \frac{a_{12} - \rho_{P_{1}}(\varphi_{1})}{\rho_{P_{1}}(\varphi_{1})} \right) d\varphi_{1}$$
(3)

Từ (1 và 3) xét trong hệ quy chiếu  $\partial_{f_{1}}(O_{I}x_{J'f_{2}})$ gắn liền với giá, phương trình đường lăn  $\Sigma^{2}$  được cho dưới dạng đại số:

$$r_{\Sigma^2} = R[z, \varphi_2(\varphi_1)] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho_{P_2}(\varphi_1) \end{bmatrix}^T$$
(4)

Trong đó:

$$R[z, \varphi_2(\varphi_1)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2(\varphi_1) & -\sin \varphi_2(\varphi_1) & a_{12} \\ \sin \varphi_2(\varphi_1) & \cos \varphi_2(\varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Thiết kế đường lăn của cặp BRKT ăn khớp trong khi biết trước một đường lăn



Hình 2. Xác định đường lăn đối tiếp của cặp BRKT ăn khớp trong

Trong trường hợp này  $\Sigma^3$  được giả thiết là biết trước. Từ Hình 2 với lập luận như trên ta có:

$$\rho_{P_4}(\varphi_3) = a_{34} + \rho_{P_3}(\varphi_3) \tag{5}$$

Còn tỷ số truyền của cặp bánh răng (3, 4) được cho bởi:

$$i_{34}(\varphi_3) = \frac{\rho_{P_4}(\varphi_3)}{\rho_{P_3}(\varphi_3)} = \frac{a_{34} + \rho_{P_3}(\varphi_3)}{\rho_{P_3}(\varphi_3)} \tag{6}$$

Góc  $\varphi_{P_4}$  tương ứng với  $\varphi_{P_3}$ , tại thời điểm thứ *i* được cho bởi:

$$\varphi_{P_4}(\varphi_3) = \int_0^{\varphi_3} \left( \frac{a_{34} + \rho_{P_3}(\varphi_3)}{\rho_{P_3}(\varphi_3)} \right) d\varphi_3$$
(7)

Từ (5 và 7) xét trong hệ quy chiếu  $\Re O4xfyf$ gắn liền với giá, phương trình đường lăn  $\Sigma^4$  được cho bởi:

$$r_{\Sigma^4}(\varphi_3) = R[z, \varphi_4(\varphi_3)] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_{P_3}(\varphi_3) \end{bmatrix}^T$$
(8)

trong đó:

$$R[z,\varphi_4(\varphi_3)] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_4(\varphi_3) & -\sin\varphi_4(\varphi_3) & a_{34} \\ \sin\varphi_4(\varphi_3) & \cos\varphi_4(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. Tổng hợp đường lăn của hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh

Trong phần này trình bày phương pháp tổng hợp đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh đầy đủ được mô tả trên Hình 3. Trong đó khâu 1 là bánh răng trung tâm, khâu 2 là cần, khâu 3 là bánh răng vệ tinh, khâu 4 là bánh răng trung tâm thứ 2 của hệ. Trong trường hợp này đường lăn  $\Sigma^3$  của bánh răng vệ tinh 3 là đường tròn lệch tâm được giả thiết là biết trước. Bài toán đặt ra là phải tìm đường lăn  $\Sigma^4$  của bánh răng trung tâm 1 và đường lăn  $\Sigma^4$  của bánh răng trung tâm thứ 2, vấn đề này được trình bày trong mục 3.2 và 3.3 dưới đây.



Hình 3. Lược đồ xác định đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh kép



Hình 4. Đường lăn của bánh răng 3

3.1. Phương trình đường lăn  $\Sigma^3$  của bánh răng vệ tinh 3

Nếu gọi đường tròn  $\Sigma^3(O,R)$  là đường lăn của bánh răng vệ tinh 3, với: tâm quay lệch tâm một khoảng e;  $P_3$  là một điểm bất kỳ trên  $\Sigma^3$ . Xét trong hệ quy chiếu  $\mathcal{G}_3\{O_3x_3y_3\}$  gắn trên  $\Sigma^3$  ta có:  $\rho_{P3}$  là khoảng cách từ điểm  $P_3$  bất kỳ trên  $\Sigma^3$  đến tâm quay  $O_3$  khi đó ta có:

$$\rho_{P3}(\varphi_3) = e \cos \varphi_3 + \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \varphi_3}$$
 (9)

với:  $\varphi_3 \in [0 \div 2\pi]$ 

# 3.2. Xác định đường lăn $\Sigma^1$ của bánh răng trung tâm thứ nhất theo đường lăn $\Sigma^3$ của bánh răng vệ tinh

Để xác định đường lăn  $\Sigma^{l}$  theo đường lăn  $\Sigma^{3}$ , áp dụng phương pháp đổi giá coi cần 2 là cố định (Hình 3) và gọi  $a_{13}$  là khoảng cách giữa hai tâm quay  $O_{l}$ ,  $O_{3}$  của cặp bánh răng (1, 3), khi đó  $\rho_{P13}$  là khoảng cách từ điểm  $P_{13}$  trên đường lăn  $\Sigma^{l}$  tới tâm quay  $O_{l}$  đối tiếp với  $P_{3l}$  trên  $\Sigma^{3}$ , xét tại thời điểm  $P_{31} \equiv P_{13} \equiv P$  tại vị trí I, trên Hình 3 ta có:

$$\rho_{P13}(\varphi_{31}) = a_{13} - \rho_{P31}(\varphi_{31}) \tag{10}$$

Thay (10) vào (2) ta có hàm truyền  $i_{13}(\varphi_{31})$ :

$$i_{13}(\varphi_{31}) = \frac{a_{13} - \rho_{P13}(\varphi_{31})}{\rho_{P13}(\varphi_{31})} \tag{11}$$

Từ (11) ta có:

$$\varphi_{13}(\varphi_{31}) = \int_{0}^{\varphi_{31}} \frac{a_{13} - \rho_{P13}(\varphi_{31})}{\rho_{P13}(\varphi_{31})} d\varphi_{31}$$
(12)

Thay các công thức (10 và 12) thay vào (4) hoàn toàn xác định được  $\Sigma^{I}$ .

Xét trong trong chuyển động tương đối giữa bánh răng 3 so với bánh răng trung tâm 1, khi bánh răng 1 quay được một vòng, để  $\Sigma^3$  lăn không trượt trên  $\Sigma^1$  thì bánh răng 3 phải quay được  $n_3$  vòng. Như vậy, theo tài liệu [12 - 14] ta có:

$$\frac{2\pi}{n_3} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{a_{13} - \rho_{P13}(\varphi_{31})}{\rho_{P13}(\varphi_{31})} \right) d\varphi_{31}$$
(13)

Giải phương trình (13) xác định được khoảng cách trục  $a_{13} = a_{13}(n_3, e, R)$  với  $n_3$  là số nguyên dương. Sau khi xác định được  $a_{13}$  thay vào (10, 12) và (4) thì  $\Sigma^{1}$  hoàn toàn xác định.

### 3.3. Xác định đường lăn $\Sigma^4$ của bánh răng 4 theo $\Sigma^3$ của bánh răng vệ tinh

Trong trường hợp này, coi hai tâm  $O_4$ ,  $O_3$  là cố định và khi đó cặp bánh răng (4, 3) là cặp bánh răng

ăn khớp trong. Nếu gọi  $a_{34}$  là khoảng cách giữa hai tâm quay  $O_3$  và  $O_4$ ; còn  $\rho_{P43}(\varphi_{34})$  là khoảng cách từ điểm  $P_{43}$  trên  $\Sigma^4$  đến tâm quay  $O_4$ , xét tại thời điểm  $P_{34} \equiv P_{43} \equiv P$  tại vị trí II, trên Hình 3 ta có:

$$\rho_{P43}(\varphi_{34}) = a_{34} + \rho_{P34}(\varphi_{34}) \tag{14}$$

Thay (14) vào (6) :

$$i_{34}(\varphi_{34}) = (a_{34} + \rho_{P34}(\varphi_{34}))(\rho_{P34}(\varphi_{34}))^{-1}$$
(15)

Từ (15) ta có:

$$\varphi_{43}(\varphi_{34}) = \int_{0}^{\varphi_{34}} (a_{34} + \rho_{P34}(\varphi_{34})) (\rho_{P34}(\varphi_{34}))^{-1} d\varphi_{34} \quad (16)$$

Tương tự như trên, khi bánh răng 4 quay được một vòng để  $\Sigma^3$  lăn không trượt trên  $\Sigma^4$  thì bánh răng 3 phải quay  $n'_3$  vòng, vì vậy:

$$\frac{2\pi}{n'_{3}} = \int_{0}^{2\pi} \left( \frac{\rho_{P34}(\varphi_{34})}{a_{34} + \rho_{P34}(\varphi_{34})} \right) d\varphi_{34}$$
(17)

Giải phương trình (17) xác định được khoảng cách trục  $a_{43} = a_{43}(n'_3, e, R)$  với  $n'_3$  là số nguyên dương. Khi xác định được  $a_{34}$  thay vào (14, 16) và (8) thì  $\Sigma^4$  cũng hoàn toàn xác định. Mặt khác, từ phương trình (13) và (17) ta nhận thấy  $a_{13}, a_{43}$  phụ thuộc vào  $n_3$  và  $n'_3$  còn e, R là các thông số cho trước. Như vậy, khi chọn  $n_3$  theo quy luật của  $i_{13}$  thì  $n'_3$  phải chọn thế nào? và thỏa mãn điều kiện gì? Vấn đề này sẽ được trình bày trong mục 3.4 dưới đây.

# 3.4. Xác định điều kiện để $\Sigma^4$ bao được hệ hành tinh khuyết $\Sigma^1$ và $\Sigma^3$

Ta dễ dàng nhận thấy để  $\Sigma^4$  bao được hệ  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^3$  thì:

$$\rho_{4\min} > a_{13} + \Delta \rho_3 \tag{18}$$

trong đó:  $\Delta \rho_3 = \rho_{3\text{max}} - \rho_{3\text{min}}$  (19)

Mặt khác, ta có:

$$a_{13} = \rho_{3\min} + \rho_{1\max} \tag{20}$$

$$a_{34} = \rho_{4\min} - \rho_{3\min} \tag{21}$$

Thay (19, 20, 21) vào (18) ta có:

$$a_{34} > a_{13} + \rho_{3\max} - 2\rho_{3\min} \tag{22}$$

Do 
$$\rho_3(\varphi_3)$$
 luôn dương, vì vậy:  
 $a_{34} + \rho_3(\varphi_3) > a_{13} + \rho_{3\text{max}} - 2\rho_{3\text{min}} + \rho_3(\varphi_3)$  (23)

Từ (23) ta có:  

$$\frac{\rho_3(\varphi_3)}{\rho_3(\varphi_3)} < \frac{\rho_3(\varphi_3)}{\rho_3(\varphi_3)}$$
(24)

$$\frac{\gamma_{3(13)}}{a_{34} + \rho_{3}(\varphi_{3})} < \frac{\gamma_{3(13)}}{a_{13} + \rho_{3\max} - 2\rho_{3\min} + \rho_{3}(\varphi_{3})}$$
(24)

Lấy tích phân 2 về của (23) với  $\varphi_3 \in [0 \div 2\pi]$  ta có:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\rho_{3}(\varphi_{3})}{a_{34} + \rho_{3}(\varphi_{3})} d\varphi_{3} < \int_{0}^{2\pi} \frac{\rho_{3}(\varphi_{3})}{a_{13} + \rho_{3\max} - 2\rho_{3\min} + \rho_{3}(\varphi_{3})} d\varphi_{3}$$
(25)

Kết hợp (25) với (17) ta có:

$$\frac{2\pi}{n'_{3}} < \int_{0}^{2\pi} \frac{\rho_{3}(\varphi_{3})}{a_{13} + \rho_{3\max} - 2\rho_{3\min} + \rho_{3}(\varphi_{3})} d\varphi_{3}$$
(26)

Từ (26) ta có:

$$n'_{3} > \frac{2\pi}{\int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\rho_{3}(\varphi_{3})}{a_{13} + \rho_{3\max} - 2\rho_{3\min} + \rho_{3}(\varphi_{3})}\right) d\varphi_{3}}$$
(27)

Bất phương trình (27) cho phép xác định  $\Sigma^4$  bao được hệ  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^3$  để tạo thành hệ BRKT kiểu hành tinh đầy đủ.

### 4. Ví dụ áp dụng

Cho trước đường lăn của bánh răng vệ tinh 3 là đường tròn (O,R) với tâm quay  $O_3$  có R = 100 mm và độ lệch tâm e=20 mm, chọn  $n_3=3$  thay vào phương trình (13) và (11) ta có  $a_{13} \approx 398,7$  mm. Từ R = 100 mm và e = 20 mm ta có  $\rho_{3\min} = 80 \text{ mm}$ ,  $\rho_{3\max} = 120 \text{ mm}$ , thay vào (27) ta có  $n'_3 > 5,589$ . Mặt khác, từ (17) thì  $n'_3$  phải là số nguyên dương, vì vậy để  $\Sigma^4$  bao được hệ  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^3$  thì  $n'_3 \ge 6$ , còn khi nhỏ hơn thì  $\Sigma^4$  không bao được hệ  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^3$ . Để chứng minh điều này ta hãy chọn  $n'_3 = 3$  và  $n'_3 = 4$  khi đó khoảng các trục lần lượt là  $a_{43} \approx 196,6$  mm và  $a_{43} \approx 295,4$  mm, đường lăn tương ứng được cho trên Hình 5, còn với  $n'_3 = 5$  khi cho bánh răng 4 cố định để đảm bảo hệ bánh răng (1, 3, 4) cùng trên một mặt phẳng theo lược đồ Hình 10b thì xuất hiện giao thoa giữa đường lăn  $\Sigma^4$  và  $\Sigma^3$ , nhưng khi để các cặp (1, 3) và (3, 4) quay tương đối với nhau trên các mặt phẳng song song thì vẫn đáp ứng hàm truyên.

Vì vậy, để đường lăn  $\Sigma^4$  bao được hệ  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^3$ thì phải chọn tối thiểu  $n'_3 = 6$ . Như vậy, bộ thông số thiết kế đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh đầy đủ được cho trong bảng 1.

**Bảng 1**. thông số thiết kế đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh

R	е	<i>a</i> <sub>13</sub>	<i>a</i> <sub>43</sub>	$n_1$	$n_4$
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]		
100	20	398,7	493,3	3	6

Từ dữ liệu thiết kế này ta có bản thiết kế đường lăn của hệ BRKT hành tinh đầy đủ được mô tả trên hình 6.



a)  $n_1 = 3$ ,  $n_4 = 3$ Hình 5. Các trường hợp đường lăn  $\Sigma^4$  không bao được  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^3$ 



Hình 6. Đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh

Trong đó bán kính  $\rho_{P1}, \rho_{P1}, \rho_{P4}$  của từng bánh răng so với tâm quay được mô tả trên hình 7.

Từ hình 7, dễ dàng nhận thấy bán kính  $\rho$  thay đổi theo chu kỳ và số chu kỳ bằng  $n_i$ . Ngoài ra, một điểm cần lưu ý là: để khoảng cách trục không đổi  $a_{13}$  và  $a_{34}$  bằng hằng số thì biên độ  $\rho$  phải bằng nhau trong trường hợp này  $\Delta \rho_1 = \Delta \rho_3 = \Delta \rho_4 = 40$  mm. Như vậy tỷ số truyền của cặp bánh răng (1,3) và (3,4) của hệ BRKT được mô tả trên Hình 8 và Hình 9.

Với điều kiện phân bố đều số răng trên đường lăn và thỏa mãn điều kiện không cắt lẹm chân răng [14], ta tính được thông số của thanh răng sinh: Môđun m = 1.758 mm, góc áp lực  $\alpha = 20^{\circ}$ , bước răng t = 5.5232 mm. Như vậy, số răng của bánh răng trụ thân khai lệch tâm 3,  $z_3 = 20$ .

Áp dụng phương pháp tạo hình bằng thanh răng sinh đối với bánh răng vệ tinh 3, sau khi tạo hình biên dạng răng của bánh răng 3 để bánh răng 1 và 4 cùng Mô-đun với bánh răng 3, lấy bánh răng 3 làm bánh răng sinh để tạo hình cho bánh răng 1 và 4 theo phương pháp bao hình của tài liệu [16] từ đó lập trình bằng AutoLisp trong môi trường AutoCAD ta có bản thiết kế hệ BRKT hành tinh được mô tả trên Hình 10a. Hình 10 là hệ bánh răng không tròn được thiết kế trên cơ sở kết quả đường lăn được mô tả trên Hình 6. Nếu cố định bánh răng trung tâm 1 hoặc bánh răng trung tâm 4 ta được hệ BRKT kiểu hành tinh đầy đủ.



**Hình 7**. Bán kính  $\rho$  của các bánh răng trong hệ BRKT hành tinh đầy đủ



Hình 8. Tỷ số truyền của cặp BRKT (1, 3) theo góc quay của trục dẫn động



Hình 9. Tỷ số truyền của cặp BRKT (3, 4) theo góc quay của bánh răng 4

### 5. Kết luận

Điểm mới của nghiên cứu này là đã xác định được điều kiện để đường lăn của bánh răng trung tâm thứ hai bao được hệ BRKT hành tinh khuyết phía trong, khi thiết kế hệ BRKT kiểu hành tinh đầy đủ. Điều kiện này cho phép tự động hóa thiết kế đường lăn của hệ bánh răng này với sự hỗ trợ của máy tính thay vì kinh nghiệm của người thiết kế. Ngoài ra, nghiên cứu này cũng đưa ra được quy trình tổng hợp đường lăn mới khi thiết kế hệ BRKT hành tinh đầy đủ như sau:

**Bước 1**: xác định phương trình  $\Sigma^3$  của bánh răng vệ tinh.



b) Lược đồ hệ thống bánh răng
 Hình 10. Hệ BRKT kiểu hành tinh

**Bućc 2**: xác định  $\Sigma^{-1}$  theo  $\Sigma^{-3}$ 

- + Tính khoảng cách trục  $a_{13} = a_{13}(n_1, e, R)$  theo phương trình (13) với  $n_3$  là chu kỳ của  $\Sigma^l$  và xác định hàm tỷ số truyền  $i_{13}$  theo công thức (11).
- + Xác đinh tham số độc cực (ρ<sub>P13</sub>, φ<sub>13</sub>) của Σ<sup>1</sup> theo công thức (10, 12).
- + Thiết lập phương trình của  $\Sigma^{l}$  dưới dạng đại số theo công thức (4).

**Buốc 3**: xác định  $\Sigma$ <sup>4</sup> theo  $\Sigma$ <sup>3</sup>

- + Xác định số chu kỳ n'<sub>3</sub> của Σ<sup>4</sup> theo bất phương trình (27) để đảm bảo Σ<sup>4</sup> bao được (Σ<sup>1</sup>, Σ<sup>3</sup>) và thiết lập hàm tỷ số truyền theo công thức (15)
- + Tính khoảng cách trục  $a_{43} = a_{43}(n_4, e, R)$  theo phương trình (13).
- + Xác đinh tham số độc cực ( $\rho_{P43}, \varphi_{43}$ ) của  $\Sigma^4$  theo công thức (14, 16).
- + Thiết lập phương trình của  $\Sigma^{I}$  dưới dạng đại số theo công thức (8).

### Tài liệu tham khảo

- Emmanuel Poulle; Équatoires et horlogerie planétaire du XIIIe au XVIe siècle, Vols 2, Droz, Geneva and Champion, Paris (1980) pp. 1162.
- [2] Leonardo da Vinci, Codex Madrid (1493).
- [3] W.W. Boyd; Elliptical gears provide feed control, Mach. Des. 12 (1940).

[4] D. Dooner, H-D Yoon and A Seireg; Kinematic considerations for reducing the circulating power effects in gear-type continuously variable transmissions; Proc Instn Mech Engrs Vol 212, Part D (1998) 463 – 478,

Doi: 10.1243/0954407981526118

- [5] Fang Yan Zheng, Ai Hua Ren, Chuan Qiong Sun, Guo Xing Sun; The Optimization and Simulation of New Type Non-Circular Gears in CVT; Applied Machanics and Materials, Vol 86 (2011) 684-687, Doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.86.684
- [6] Takashi Emura, Akira Arakawa, A New Steering Mechanism Using Noncircular Gears (1992) 604-610, Doi: 10.1299/kikaic.57.154
- [7] Dooner, D.B, Function generation utilizing an 8-Bar linkage and optimized noncircular gear elements with application to automotive steering, Institution of Mechanical Engineers, Part C (2001) 847-857, Doi: 10.1243/0954406011524090
- [8] David B. Dooner, Kinematic geometry of gearing, Wiley, (2012)
- [9] Fangyan Zheng, Lin Hua, Xinghui Han, Bo Li and Dingfang Chen, Synthesis of Shaped Noncircular Gear Using a Three-Linkage Computer Numerical Control Shaping Machine, Journal of Manufacturing Science and Engineering Vol 139 (2017),

Doi: 10.1115/1.4035794

- [10] Giorgio Figliolini, Jorge Angeles, The synthesis of elliptical gears generated by shaper – cutters, Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 125 (2003) 793-801, Doi: 10.1115/1.1631573
- [11] Fangyan Zheng, Lin Hua, Xinghui Han, Bo Li, Dingfang Chen, Synthesis of indexing mechanisms with non-circular gears, Mechanism and Machine Theory 105 (2016) 108-128,

Doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.06.019

- [12] Faydor L. Litvin, Ignacio Gonzalez-Perez, Alfonso Fuentes, Kenichi Hayasaka, Design and investigation of gear drives with non-circular gears applied for speed variation and generation of functions, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 197 (2008) 3783–3802, Doi: 10.1016/j.cma.2008.03.001
- [13] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes-Azna, Ignacio Gonzalez-Perez, Kenichi Hayasaka, Noncircular Gears Design and Generation, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York (2009).
- [14] D. Mundo, Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears, Mechanism and Machine Theory 41 (2006) 456–472, Doi: 10.1016/i.mechmachtheory.2005.06.003
- [15] Nguyễn Xuân Lạc, Nguyên lý máy chuyên nghiệp, Bách khoa 1969.
- [16] Dazhu Li, Lian Xia, Youyu Liu, Jiang Han, Research on Non-circular Gear Hobbing Simulation Based on Piecewise Cubic Spline Fitting, Engineering Materials Vol 620 (2014) 357-362, Doi: 10.4028/ www.scientific.net/KEM.620.357