Nghiên cứu tạo hình biên dạng răng của hệ bánh răng không tròn thường bằng thanh răng sinh và bánh răng sinh Novikov

Shaping Tooth Profile of Common Non-Circular Gears Using Rack and Novikov Tooth Profile

Nguyễn Hồng Thái^{1*}, Nguyễn Thành Trung^{1,2} Nguyễn Thùy Dương¹, Nguyễn Hoàng Việt¹

 ¹ Trường Đại học Bách khoa Hà Nội - Số 1 Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội.
 ² Viện nghiên cứu Cơ khí - Số 4, Phạm Văn Đồng, Cầu Giấy, Hà Nội. Đến Tòa soạn: 17-5-2019; chấp nhận đăng: 20-01-2020

Tóm tắt

Hệ bánh răng không tròn thường đã và đang được ứng dụng trong các hệ thống truyền động có tỉ số truyền biến đổi như: cần gạt nước ô tô, hộp biến đổi tốc độ CVT hay cơ cấu đánh lái của các dòng ô tô thế hệ mới ... Cho đến hiện nay, khi nghiên cứu về các hệ bánh răng này hầu hết các nhà khoa học trong và ngoài nước đều chỉ tập trung vào các loại bánh răng không tròn với biên dạng là đường thân khai của đường tròn hoặc đường hypebol còn biên dạng kiểu Novikov chưa được đề cập đến. Trong bài báo này các tác giả ứng dụng thanh răng sinh và bánh răng sinh Novikov để tạo hình biên dạng cho các bánh răng cấu thành lên hệ bánh răng không tròn thường với biên dạng kiểu Novikov. Để giải quyết vấn đề này trong từng cặp bánh răng của hệ, thì bánh răng chủ động sẽ được tạo hình biên dạng răng bằng phương pháp bao hình thông qua thanh răng sinh Novikov, còn biên dạng bánh răng bị động sẽ được tạo hình từ bánh răng sinh Novikov (bánh răng được hình thành từ thanh răng sinh Novikov) để đảm bảo điều kiện ăn khóp đối tiếp và tránh được hiện tượng cắt lẹm chân răng. Trên cơ sở đó nghiên cứu này đưa ra quy trình tổng hợp các hệ bánh răng không tròn thường với biên dạng kiểu Novikov.

Từ khóa: Bánh răng Novikov, bánh răng không tròn, hệ bánh răng thường, thiết kế biên dạng răng.

Abstract

Non-circular gear units have been used in variable transmissions such as car wipers, CVT speed variants or steering mechanism in new car generations, etc. Until now, most scientists are only focused on non-circular gears with involute profile of a circle or a hyperbola when researching these gears. The Novikov-type profiles have not been mentioned. In this work, the authors use the Novikov gears and racks to generate the tooth profile of non-circular gears. To solve this problem for each pair of gears in a gear train, the tooth profile of the driving gear is formed by finding the envelope of a Novikov rack, while the tooth profile of the driving gear shaping method (with the driving gear used as the cutter) to ensure meshing ratio and to prevent undercutting. Based on that, the study provides a general procedure for the synthesis of Novikov non-circular gears.

Keywords: Novikov gears, noncircle gears, simple gear train system, profile design.

1. Đặt vấn đề

Bánh răng Novikov hay còn gọi là bánh răng W-N (*Wildhaber - Novikov*) được đề xuất bởi Wildhaber (1926) và Novikov (1956) đây là loại bánh răng trụ tròn răng xoắn với tỷ số truyền không đổi, có biên dạng là các cung tròn lồi, lõm [1, 2]. Sự khác biệt của hai phát minh này là ở đặc điểm tiếp xúc trong quá trình ăn khớp, cặp bánh răng (*BR*) được đề xuất bởi Wildhaber là tiếp xúc đường, còn cặp *BR* được đề xuất bởi Novikov là tiếp xúc điểm [3]. Ưu điểm của loại biên dạng W-N là khả năng chịu tải và chịu mài mòn cao hơn biên dạng thân khai và thường được ứng

dụng ở dải tốc độ thấp. Chính vì vậy, bánh răng W-N là chủ để nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trên thể giới như: ứng dụng biên dạng thanh răng sinh W-N để tao hình biên dang của cặp bánh rặng hypoid [4], hay cải tiến biên dạng W-N bằng cung parabol để nâng cao khả năng tải [5]. Đó là các nghiên cứu về BR có tỷ số truyền không đổi, còn ứng dụng biên dạng cung tròn cho bánh răng không tròn (BRKT) có tỷ số truyền thay đổi thì cho đến nay, chưa có một nghiên cứu nào mặc dù BRKT cũng là một chủ đề nghiên cứu được nhiều nhà khoa học trên thể giới quan tâm, tiêu biểu là Litvin và Dooner [6, 7]. Do đó, việc ứng dụng biên dạng W-N làm biên dạng của răng *BRKT* để nâng cao khả năng tải và chịu mài mòn cho các ứng dụng cần mô men và tải lớn là cần thiết. Đây chính là nội dung nghiên cứu của bài viết. Để

^{*} Địa chỉ liên hệ: Tel.: (+84) 913.530.121

Email: thai.nguyenhong@hust.edu.vn

giải quyết vấn đề này nhóm tác giả bài viết sử dụng thanh răng sinh và *BR* sinh Novikov để tạo hình biên dạng cho các cặp *BRKT*. Để minh họa cho phương pháp nghiên cứu, trong bài viết này chúng tôi lấy một ví dụ minh họa là hệ *BRKT* thường có lược đồ cho trên Hình 1.

2. Thiết kế đường lăn của hệ BRKT thường

2.1. Cơ sở lý thuyết thiết kế

Theo [8] và cơ sở lý thuyết mà chúng tôi đã trình bày chi tiết ở [9], trong nội dung này chúng tôi tóm tắt lại để có tính lôgíc và làm cơ sở thiết kế đường lăn của hệ *BRKT*. Do đó, trong trường hợp tổng quát hàm truyền của cặp *BRKT* được cho:

$$i_{j,j+1}(\varphi_j) = \frac{A_{j,j+1} + (-1)^e \rho_j(\varphi_j(\theta))}{\rho_j(\varphi_j(\theta))}$$
(1)

Trong đó: *j* là ký hiệu cho *BR* chủ động (với *j* là các số nguyên dương); $\rho_j(\varphi_j(\theta))$ là bán kính cực tại thời điểm φ_j ; φ_j là góc quay của *BR* chủ động tại thời điểm đang xét (trong hệ quy chiếu gắn liền với giá), θ là góc cực (tham số) hình thành đường lăn Σ_j của *BR* chủ động (trong hệ quy chiếu của *BR* _j); còn *e* là hệ số xét dấu (*e* = 1 khi cặp *BRKT* ăn khớp ngoài, *e* = 0 khi cặp *BRKT* ăn khớp trong); $A_{j,j+1}$ là khoảng cách trục của cặp *BRKT* (*j*, *j*+1).

Như vậy, tương ứng với từng điểm P_j (tâm ăn khóp) trên Σ_j được cho bởi bán kính cực $\rho_j(\varphi_j(\theta))$ và góc quay φ_j của BR_j ta có bộ tham số thiết kế đường lăn của BR bị động ăn khóp tương ứng với BR chủ động trong trường hợp tổng quát:

$$\rho_{j+1}(\varphi_{j+1}(\varphi_j(\theta))) = A_{j,j+1} + (-1)^e \rho_j(\varphi_j(\theta))$$
(2)

$$\varphi_{j+1}(\varphi_j) = \int_{0}^{\varphi_j(\theta)} i_{j+1,j}(\varphi_j(\theta)) d\varphi_j = \int_{0}^{\varphi_j(\theta)} \frac{d\varphi_j}{i_{j,j+1}(\varphi_j(\theta))}$$
(3)

Mặt khác, do điều kiện lăn không trượt của hai đường lăn trên *BR* chủ động và bị động khi ăn khớp, nếu gọi n_j là số vòng quay của *BR* chủ động để *BR* bị động quay hết 1 vòng, khi đó ta có:

$$2\pi = \int_{0}^{\frac{2\pi}{n_j}} \left(\frac{A_{j,j+1}}{\rho_j(\varphi_j(\theta))} + (-1)^e \right) d\varphi_j$$
(4)

với n_j là số dương, từ phương trình (4), nếu cho trước hàm tỷ số truyền $i_{j,j+1}(\varphi_j)$ thì khoảng cách trục được cho bởi $A_{j,j+1} = f(i_{j,j+1}(\varphi_j), n_j, \Sigma_j)$, còn khi cho trước khoảng cách trục $A_{j,j+1}$ thì xác định được hàm truyền $i_{j,j+1}(\varphi_j)$.

2.2. Thiết lập phương trình đường lăn của hệ BRKT thường

Từ cơ sở lý thuyết trình bày trong mục 2.1, nhóm tác giả tiến hành thiết kế đường lăn của các *BRKT* trong hệ *BR* thường có lược đồ cho trên Hình 1 với giả thiết biết trước: đường lăn Σ_I của *BR*₁ là đường elipse chính tâm và đường lăn Σ_4 của *BR*₄ là elipse lệch tâm.



Hình 1. Hệ BRKT thường ăn khớp trong

Bài toán đặt ra là xác định: đường lăn Σ_2 của BR_2 , đường lăn Σ_3 của BR_3 và khoảng cách trục A_{12} , A_{34} . Để đơn giản trong trường hợp này coi $\varphi_i(\theta) \equiv \varphi_i$, khi đó xét:

• Trường hợp 1: cặp BRKT 1-2 (cặp bánh răng ăn khớp trong)

Theo [10] đường lăn Σ_l được cho bởi:

$$\rho_1(\varphi_1) = 2a_1b_1\left((a_1 + b_1) - (a_1 + b_1)\cos(2\varphi_1)\right)^{-1}$$
(5)

trong đó: a_1, b_1 lần lượt là bán trục lớn và bán trục nhỏ của elíp Σ_l ; φ_1 là tham số của Σ_l , thay (5) vào (1 - 3) ta có:

$$\begin{cases} \rho_{2}(\varphi_{2}(\varphi_{1})) = A_{12} + \rho_{1}(\varphi_{1}) \\ i_{12}(\varphi_{1}) = \left(A_{12}(2a_{1}b_{1})^{-1}\right)\left((a_{1} + b_{1}) - (a_{1} - b_{1})\cos(2\varphi_{1})\right) - 1 \\ \varphi_{2}(\varphi_{1}) = \int_{0}^{\varphi_{1}} \frac{2a_{1}b_{1}}{A_{12}\left((a_{1} + b_{1}) - (a_{1} - b_{1})\cos(2\varphi_{1})\right) - 2a_{1}b_{1}} d\varphi_{1} \end{cases}$$

$$(6)$$

thay (6) vào (4) áp dụng tích phân Dwight [6] sau khi giải, ta có khoảng cách trục A_{12} :

$$A_{12}(a_1, b_1, n_1) = (2)^{-1} \left((a_1 + b_1) + \left((a_1 + b_1)^2 - 4a_1b_1(1 - (n_1)^{-2}) \right)^{0.5} \right)$$
(7)

• Trường hợp 2: cặp BRKT 3-4 (cặp bánh răng ăn khớp ngoài)

ſ

Trong trường hợp này giả thiết BR_4 là bánh chủ động để tìm đường lăn của BR_4 , khi đó theo [6] phương trình đường lăn Σ_4 của BR_4 là elipse lêch tâm được cho bởi:

$$\rho_4(\varphi_4) = a_4(1 - E^2)(1 - E\cos\varphi_4)^{-1}$$
(8)

trong đó: a_4 là bán truc lớn của Σ_4 , φ_4 là góc tham số của Σ_4 , E là tâm sai của Σ_4 và $E = (1 - b_4^2 a_4^{-2})^{0.5}$

thay (8) vào từ (1 - 3) ta có:

ſ

$$\begin{cases} \rho_{3}(\varphi_{3}(\varphi_{4})) = A_{34} - \rho_{4}(\varphi_{4}) \\ i_{43}(\varphi_{4}) = \left[A_{43}(1 - E\cos\varphi_{4}) - (a_{4}(1 - E^{2}))\right](a_{4}(1 - E^{2})^{-1} \\ \varphi_{3}(\varphi_{4}) = \int_{0}^{\varphi_{4}} (a_{4}(1 - E^{2})\left(A_{34}(1 - E\cos\varphi_{4}) - a_{4}(1 - E^{2})\right)^{-1} d\varphi_{4} \end{cases}$$
(9)

thay (9) vào (4) áp dung tích phân Dwight và giải ta có khoảng cách trục A_{34} :

$$A_{34}(a_4, E, n_4) = a_4 \left[1 + \left((1 + (1 - E^2)(n_4^2 - 1))^{0.5} \right]^{0.5} \right]^{0.5}$$
(10)

2.3. Phân tích động học và thiết kế đường lăn của hệ BRKT thường

Trên cơ sở phương trình đường lăn của hệ *BRKT* đã được thiết lập ở mục 2.2 áp dụng cho lược đồ Hình 1 với: *BR*₁ có đường lăn là một elipse chính tâm với các thông số thiết kế a_1 = 43.4 mm, b_1 = 35 mm, n_1 = 2, và *BR*₄ có đường lăn là elipse lệch tâm với các tham số thiết kế a_4 = 29 mm, E_4 = 0.5 mm, n_4 = 2.5. Thay vào (7 và 10) ta có khoảng cách trục A_{12} = 58.59 mm, A_{34} = 81.264 mm. Như vậy, đường lăn của hệ *BRKT* được tổng hợp được cho trên Hình 2.



Hình 2. Đường lăn của hệ BRKT thường sau khi tổng hợp

Từ Hình 2, ta có hàm truyền của hệ được cho bởi:

$$i_{14}(\varphi_1) = i_{12}(\varphi_1)(i_{43}(\varphi_1))^{-1}$$
(11)

Với các thông số thiết kế đường lăn như trên, Hình 3 là đồ thị hàm truyền $i_{14}(\varphi_1)$ của hệ.



Từ Hình 3 cho thấy sự biến đổi của hàm truyền của hệ *BRKT* lớn hơn từng cặp tương ứng. Điều đó có nghĩa dải biến đổi mô men của hệ sẽ lớn hơn từng cặp.

3. Tạo hình biên dạng răng của các BRKT trong hệ

3.1. Thiết lập phương trình biên dạng răng của BRKT 1 và 4

a) Phương trình mô tả biên dạng răng của thanh răng sinh Novikov

Theo tài liệu [8] phương trình biên dạng sinh $\{\Gamma_s\}$ của thanh răng Novikov được cho bởi:

$$\{\Gamma_s\}: \mathbf{r}_s = [\rho_t \cos\theta_t + x_{ot} + n_s p_n \quad \rho_t \sin\theta_t + y_{ot}]^T \quad (12)$$

trong đó: ρ_t là các bán kính cực cung tròn, với t = (f, g, a), còn θ_t là góc tham số biên dạng thanh răng; (x_{ot}, y_{ot}) là tọa độ tâm các cung tròn hình thành biên dạng thanh răng (*xem Hình 4*); θ_t là tham số góc của các cung tròn; p_n là bước răng và $p_n = \pi m$ (mm), với m là mô-đun tiêu chuẩn (mm); h_f là chiều cao đỉnh răng (mm); h_p chiều cao chân răng (mm) với chiều cao răng $h = h_f + h_p$ (mm); tt' là đường chia (*đường trung bình*) của thanh răng sinh, khi đó chiều dày răng t_v bằng chiều rộng rãnh răng t_u , tức $t_v = t_u = p_n/2$; n_s là số răng trên thanh răng.

b) Xác định mối quan hệ giữa chuyển động tịnh tiến của thanh răng sinh Novikov và góc quay của BRKT khi tạo hình biên dạng răng

Xét một cặp *BRKT* 1-2 ăn khớp với nhau, với giả thiết bán kính vòng lăn $\rho_2(\varphi_2(\varphi_1)) \rightarrow \infty$, khi đó *BR*₂ suy biến thành thanh răng Γ_s và đường lăn 2 (Σ_2) suy biến thành đường thẳng *tt'* (đường chia Σ_{s}) của thanh răng sinh Novikov Γ_{s} .



Hình 4. Thanh răng sinh Novikov

Như vậy, tại điểm tâm ăn khớp P đường thẳng (Σ_8) luôn lăn không trượt trên đường lăn Σ_l . Dẫn đến vận tốc tương đối $V_{P_lP_8} = 0$ (vận tốc tương đối giữa điểm P_l thuộc Σ_l và điểm P_8 thuộc Σ_8), do đó:

$$V_{P1} - V_{PS} = 0 (12)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} V_{PS} = \frac{dS(\varphi_1)}{dt} \\ V_{P1} = \int_{0}^{\varphi_1} \left[\rho_1(\varphi_1(\theta)) + \rho_1'(\varphi_1(\theta)) \right]^{0.5} \frac{d\varphi_1}{dt} + h(\varphi_1(\theta)) \end{cases}$$
(13)

Với: $h(\varphi_1(\theta)) = \rho_1(\varphi_1(\theta))\sin(\varphi_1 - \theta)$



Hình 4. Chuyển động tạo hình giữa thanh răng sinh Novikov Γ_s và *BRKT*

Thay (13) vào (12) ta có mối quan hệ giữa chuyển động tịnh tiến $S(\varphi_1)$ của thanh răng Novikov với góc quay φ_1 của *BRKT*:

$$S(\varphi_{1}) = \int_{0}^{\varphi_{1}} \left[\rho_{1}(\varphi_{1}(\theta)) + \rho_{1}'(\varphi_{1}(\theta)) \right]^{0.5} d\varphi_{1} + h(\varphi_{1}(\theta)) \quad (14)$$

với: θ là góc cực của Σ_l xác định vị trí của P trong hệ quy chiếu của *BRKT*₁

c) Xác định phương trình biên dạng răng của BRKT 1 và BRKT 4

Nếu gọi: $\mathcal{G}_{f}(O_{x,\beta'z',\beta'}, \mathcal{G}_{1}\{O_{1x_{1}y_{1}z_{1}}\}, \mathcal{G}_{S}(O_{sx,sy,sz_{S}})$ lần lượt là hệ quy chiếu cố định gắn liền với giá, hệ quy chiếu động gắn trên BR_{1} , hệ quy chiếu động gắn trên thanh răng sinh Novikov (*Hình 4*) thì trong quá trình tạo hình biên dạng răng Γ_{1} của $BRKT_{1}$:

(*i*) Thanh răng sinh chuyển động tịnh tiến với vận tốc V_s ; (*ii*) $BRKT_1$ vừa quay quanh tâm O₁ (*tâm quay của bánh răng*), vừa chuyển động tịnh tiến một đoạn $\ell_1(\varphi_1)$ trên trục O_{lyf} .

Như vậy, tương ứng với mỗi điểm K_S trên Γ_s của thanh răng Novikov ta có một điểm K_I trên biên dạng Γ_1 của *BRKT*₁ được cho bởi:

$$\mathbf{r}_{K_1} = {}^{1}\mathbf{M}_{O_1} {}^{O_1}\mathbf{M}_{f} {}^{f}\mathbf{M}_{S}\mathbf{r}_{K_S}$$
(15)

trong đó:

$${}^{f}\mathbf{M}_{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell \\ 0 & 1 & 0 & S(\varphi_{1}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; o_{i}\mathbf{M}_{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_{1}(\varphi_{1}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$${}^{1}\mathbf{M}_{O_{1}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{1} & -\sin\varphi_{1} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{1} & \cos\varphi_{1} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{1} & \cos\varphi_{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$v\dot{\phi}i: \ \ell = const, \ \ell_{1}(\varphi_{1}) = \ell - \rho_{1}(\varphi_{1}(\theta))\cos(\varphi_{1} - \theta)$$

Ngoài ra, do $\mathbf{r}_{K_1} = \begin{bmatrix} x_{K1} & y_{K1} \end{bmatrix}^T$ là điểm thuộc Γ_1 , theo định lý đối tiếp [9] phải thỏa mãn:

$$\frac{-x_{K_1}}{n_x} = \frac{S(\varphi_1) - y_{K_1}}{n_y}$$
(16)

vói: $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix}^T$: là vector pháp tuyến của Γ_s (đường biên dạng thanh răng Novikov).

Bảng 1. Bộ thông số thiết kế của dao thanh răng Novikov

STT	Ký	Đơn vị	Giá trị	
	hiệu		Thanh răng 1	Thanh răng 4
1	m	mm	2.5	2
2	ρ_{f}	mm	3.5	2.93
3	ρ_a	mm	3.75	2.8
4	ρ_{g}	mm	1.3	0.87

Áp dụng phương trình biên dạng *BRKT* đã xác định dưới dạng tổng quát ở trên, thiết kế biên dạng răng Novikov cho *BRKT*₁ và *BRKT*₄ của hệ *BRKT* thường với thông số thiết kế của dao thanh răng Novikov₁ và Novikov₄ được cho trong Bảng 1 và Hình 5. Từ mô-đun cho trước theo tiêu chuẩn Bảng 1 ta xác định được số răng $z_1=32$, $z_4=27$. Trong trường hợp số răng z_1 , z_4 không phải là số nguyên dương thì cần phải xác định lại các tham số a_1,b_1,a_4,E_4 thông qua chu vi C_1 , C_4 của đường lăn \sum_1 và \sum_4 :



a) Thanh răng sinh tạo hình bánh răng 1 (bánh răng Elipse chính tâm)





Hình 5. Thông số thiết kế thanh răng Novikov

$$\begin{cases} C_{1} = \int_{0}^{2\pi} \left(\left(\frac{2a_{1}b_{1}}{a_{1} + b_{1} - (a_{1} - b_{1})\cos(2\varphi_{1})} \right)^{2} + \frac{(8a_{1}b_{1}(a_{1} - b_{1})\sin(2\varphi_{1}))^{2}}{(a_{1} + b_{1} - (a_{1} - b_{1})\cos(2\varphi_{1}))^{4}} \right)^{0.5} d\varphi_{1} \\ C_{4} = \int_{0}^{2\pi} \left(\left(\frac{a_{4}(1 - E_{4}^{2})}{1 - E_{4}\cos\varphi_{4}} \right)^{2} + \frac{(a_{4}(1 - E_{4})E_{4}\sin\varphi_{4})^{2}}{(1 - E_{4}\cos\varphi_{4})^{4}} \right)^{0.5} d\varphi_{4} \end{cases}$$
(17)

Biên dạng răng của BR_1 và BR_4 sau khi tổng hợp được cho trên Hình 6 dưới đây.



Hình 6. Biên dạng răng Novikov sau khi được tạo hình

3.2. Thiết lập mô hình toán học mô tả biên dạng răng của BRKT bị động bằng bánh răng sinh Novikov

Sau khi đã thiết kế được biên dạng răng (Γ_1 , Γ_4) của BR_1 và BR_4 . Để tạo hình biên dạng BR_2 và BR_3 sao cho các cặp BR 1-2 và BR 3-4 cùng mô-đun mtrong phần này coi BR_1 và BR_4 là BR sinh để tạo hình biên dạng răng cho BR_2 và BR_3 đối tiếp theo từng cặp tương ứng của hệ BRKT có lược đồ ở Hình 1.

Xét cặp *BRKT* 1-2, để thực hiện tạo hình biên dạng răng của *BR*₂ bằng bánh răng sinh Novikov theo phương pháp đổi giá [11] ta coi *BR*₂ là giá còn đoạn O_1O_2 là cần mang *BR*₁ thực hiện 2 chuyển động (*xem Hình* 7): (*i*) Quay quanh tâm quay O_1 của *BR*₁ một góc ϕ_i ; (*ii*) Quay quanh tâm quay O_1 của *BR*₂ một góc - ϕ_2 .

Như vậy, nếu đặt $\mathcal{G}_2\{O_{2x_2y_2}z_2\}$ là hệ quy chiếu gắn trên BR_2 , thì khi đó \mathcal{G}_2 được coi là hệ quy chiếu cố định. Với chuyển động của BR_1 như trên ứng với mỗi điểm K₁ trên Γ_1 khi tham gia ăn khớp với BR_2 sẽ hình thành một điểm K₂ trên Γ_2 của BR_2 và được cho bởi:

$$\mathbf{r}_{K_2} = {}^2 \mathbf{M}_{O_2} {}^{O_2} \mathbf{M}_{O_1} \mathbf{M}_1 \mathbf{r}_{K_1}$$
(18)

trong đó:

$$\mathbf{M}_{1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{1} & -\sin \varphi_{1} & 0 & 0\\ \sin \varphi_{1} & \cos \varphi_{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^{O_{2}}\mathbf{M}_{O_{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -A_{12}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{2}\mathbf{M}_{O_{2}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{2}(\varphi_{1})) & -\sin(\varphi_{2}(\varphi_{1})) & 0 & 0\\ \sin(\varphi_{2}(\varphi_{1})) & \cos(\varphi_{2}(\varphi_{1})) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$



Hình 7. Chuyển động tạo hình giữa bánh răng sinh Novikov và *BRKT*

Tương tự áp dụng đối với cặp bánh răng 3 - 4 ta cũng có phương trình xác định biên dạng Γ_3 của BR_3 theo công thức (17).

Từ nguyên lý hình thành đường lăn của hệ *BRKT* được xác định trong mục 2 thì các cặp đường lăn (\sum_1, \sum_2) và (\sum_3, \sum_4) luôn lăn không trượt trên nhau. Mặt khác, do bước răng được tính trên vòng lăn vì vậy số răng của *BR*₂ và *BR*₄ được cho bởi:

$$\begin{cases} z_2 = n_1 z_1 \\ z_3 = n_4 z_4 \end{cases}$$
(19)

thay z_1 và z_4 vào (19) ta có: $z_2 = 80$, $z_4 = 54$. Hình 8 là biên dạng răng của BR_2 và BR_4 sau khi thiết kế.



Hình 8. Biên dạng răng của $BRKT_2$ và $BRKT_3$ sau khi tạo hình biên dạng

3.3. Kiểm tra điều kiện cắt lẹm chân răng

Khi gia công bánh răng phần đỉnh thanh răng ăn sâu vào biên dạng của *BR* làm mất đi một phần chân răng của *BR* đây được gọi là *hiện tượng cắt lẹm chân* răng, lẹm chân răng sẽ làm giảm độ bền răng của răng trong quá trình ăn khớp đặc biệt đối với *BRKT* các răng chịu lực và mô men không đều. Vì vậy, khi thiết kế biên dạng răng cần phải tránh hiện tượng cắt lẹm chân răng, theo [6] để không có hiện tượng cắt lẹm chân răng thì phương trình sau phải được thỏa mãn:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_{K_{3x}}}{\partial \theta_t} & -V_{j,j+1x} \\ \frac{\partial f(\varphi_j)}{\partial \theta_t} & -\frac{\partial f}{\partial \varphi_j} \frac{d\varphi_j}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_{K_{3}y}}{\partial \theta_t} & -V_{j(j+1)y} \\ \frac{\partial f(\varphi_j)}{\partial \theta_t} & -\frac{\partial f(\varphi_j)}{\partial \varphi_j} \frac{d\varphi_j}{dt} \end{vmatrix} = 0$$
(19)

trong đó:

 $V_{j(j+1)}$ vận tốc trượt tương đối tại điểm tiếp xúc giữa thanh răng Novikov và *BRKT* khi xét trong hệ quy chiếu $\mathcal{G}_{S}{O_{S}X_{S}y_{S}Z_{S}}$:

$$\mathbf{V}_{j(j+1)} = [\omega_j(r_{K_s} - S(\varphi_j)) - \omega_j r_{K_{sr}}]^T \qquad (20)$$

 $f(\varphi_i)$ xác định từ (16):

$$f(\varphi_{j}) = -r_{K_{S}x}n_{y} - (S(\varphi_{j}) - r_{K_{S}y})n_{x}$$
(21)



Hình 9. Hệ BRKT thường sau khi hiệu chỉnh và hoàn thiện thiết kế

Những điểm $K_s \in \Gamma_s$ không thỏa mãn hệ định thức (19) là những điểm gây ra cắt lẹm chân răng cần được kiểm tra. Áp dụng biểu thức toán học đã được thiết lập ở mục 2 và mục 3, sau khi kiểm tra điều kiện cắt lẹm chân răng Hình 9 là hệ *BRKT* răng thẳng biên dạng Novikov sau khi hiệu chỉnh so với bộ thống số thiết kế đường lăn ban đầu cho ở mục 2.3 như sau: Σ_1 có: $a_1 = 44.4$ mm, $b_1 = 35$ mm;

 Σ_4 có: $a_4 = 28.9$ mm, $E_4 = 0.5$ mm; cặp *BRKT* 1-2 có: $A_{12} = 58.99$ mm; *BRKT* 3-4 có $A_{34} = 81$ mm.

3.4. Quy trình thiết kế hệ BRKT thường biên dạng Novikov

Từ những nghiên cứu đã trình bày ở trên, trong mục này đưa ra quy trình tổng quát trong thiết kế hệ *BRKT* có biên dạng Novikov như sau:

Bước 1: Thiết kế đường lăn của hệ

+ Xác định đường lăn Σ_2 , Σ_3 theo công thức (6, 9) và khoảng cách trục A_{12} , A_{34} theo công thức (7, 10). Trong trường họp tổng quát có thể xác định theo công thức (2 - 4).

Bước 2: Thiết kế biên dạng răng của BR chủ động bằng thanh răng sinh Novikov

Từ thông số thiết kế của thanh răng sinh Novikov được cho bởi công thức (12), ta có phương trình toán học mô tả biên dạng răng của BR chủ động được cho bởi công thức (15, 16). Tuy nhiên, khi phân bố răng nếu số răng của BR chủ động là số nguyên dương thì tiếp tục sang bước 3, còn nếu số răng của BR chủ động là số thập phân thì chọn phần nguyên và hiệu chỉnh thông số thiết kế đường lăn theo công thức (17) và quay về **bước 1** để xác định lại bộ thông số thiết kế đường lăn của BR chủ động.

Bước 3: Xác định biên dạng răng của BR bị động bằng bánh răng sinh Novikov. Sau khi xác định được biên dạng răng của BR bị động, dùng các bánh răng này làm BR sinh để tạo hình cho BRKT ăn khớp đối tiếp theo công thức (18). Tuy nhiên, cần kiểm tra điều kiện cắt lẹm chân răng thông qua công thức (20). Nếu không thỏa mãn (*tức có hiện tượng cắt lẹm chân răng xảy ra*) thì phải phân bố lại số răng và hiệu chỉnh thông số thiết kế thanh răng mà vẫn không thỏa mãn thì quay lại bước 1.

5. Kết luận

Điểm mới của nghiên cứu này là ứng dụng thanh răng sinh và *BR* sinh Novikov trong việc tạo hình biên dạng răng của các cặp *BR* trong hệ *BRKT* thường có biên dạng răng kiểu Novikov mà trong quá trình nghiên cứu về *BRKT* chúng tôi chưa thấy một công bố nào đề cập đến vấn đề này. Ưu điểm của nghiên cứu này là chỉ cần dùng một dao thanh răng để tạo hình cho một cặp cho cặp *BRKT* thay vì phải dùng hai dao thanh răng có biên dạng ngược nhau như đã trình bày trong [9]. Ngoài ra, nghiên cứu này còn đưa ra một quy trình thiết kế các hệ *BRKT* thường có biên dạng là các cung tròn kiểu Novikov trong những ứng dụng cần tải lớn.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ giáo dục và Đào tạo trong đề tài cấp Bộ, Mã số B2019-BKA–09.

Tài liệu tham khảo

- Gang Ye, Xian-You Ye; A new method for seeking the optimum gear tooth profiles the theoretical basis of Wildhaber–Novikov gearing, Mechanism and Machine Theory 37 (2002) 1087–1103.
- [2] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes, Ignacio Gonzalez-Perez, Luca Carnevali, Thomas M. Sep; New version of Novikov–Wildhaber helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191 (2002) 5707–5740.
- [3] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes; Gear Geometry and Applied Theory; Cambridge University Press (2004).
- [4] K. Syzrantseva, V. Syzrantsev; Estimation of Novikov Gearing Loading Capacity Based om Integral Strain Gauges Application; Procedia Engineering 206 (2017)1081–1086.
- [5] Houjun Chen, Xiaoping Zhang, Xiong Cai, Zhilan Ju, Chang Qu, Donghe Shi; Computerized design, generation and simulation of meshing and contact of hyperboloidal-type normal circular-arc gears; Mechanism and Machine Theory 96 (2016) 127–145.
- [6] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes Aznar, Ignacio Gonzalez Perez, Kenichi Hayasaka; Noncircular Gears Design and Generation; Published in the United States of America by Cambridge University Press (2009).
- [7] David B. Dooner; Kinematic geometry of gearing, Wiley, (2012).
- [8] F.L. Litvin, Jan Lu; New Methods for Improved Double Circular-Arc Helical Gears; Report Army Research Laboratory, NASA (1997).
- [9] Nguyễn Thành Trung, Nguyễn Hồng Thái, Đàm Công Trưởng; Ứng dụng biên dạng Novikov trong thiết kế hệ bánh răng không tròn; Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc Kỷ nệm 40 năm thành lập Viện Cơ học, Hà Nội 2019.
- [10] Libardo V. Vanegas-Useche, Magd M. Abdel-Wahab, Graham A. Parker; A New Noncircular Gear Pair to Reduce Shaft Accelerations: A Comparison with Sinusoidal and Elliptical Gears. Dyna, 83(198) (2016), 220-228.
- [11] Đinh Gia Tường, Nguyễn Xuân Lạc, Trần Doãn Tiến; Nguyên Lý Máy; Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp (1970).