

# Tổng hợp bộ truyền bánh răng không tròn ăn khớp ngoài biên dạng cycloid

## Synthesis of the External Non-Circular Gear-Train with Cycloid Profile

Nguyễn Hồng Thái<sup>1,\*</sup>, Nguyễn Thành Trung<sup>1,2</sup>, Lưu Xuân Nghĩa<sup>1</sup>, Nguyễn Thùy Dương<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Bách khoa Hà Nội - Số 1, Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

<sup>2</sup>Viện nghiên cứu Cơ khí - Số 4, Phạm Văn Đồng, Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

Đến Tòa soạn: 05-04-2019; chấp nhận đăng: 25-09-2020

### Tóm tắt

Bánh răng không tròn gần đây đang được nghiên cứu và phát triển nhằm thay thế các cơ cấu biến đổi chuyển động trong một số trường hợp đặc biệt, cũng như ứng dụng thiết kế các bộ biến đổi tốc độ vô cấp trong công nghiệp. Tuy nhiên, cho đến nay hầu hết các nhà khoa học trong và ngoài nước mới chỉ nghiên cứu về các loại bánh răng không tròn có biên dạng là đường thân khai của đường tròn, còn các loại đường cong khác chưa đề cập đến. Để thiết kế một loại bánh răng không tròn mới với biên dạng là đường cycloid (đường epicycloid và hypocycloid) trong bài báo này các tác giả trình bày phương pháp thiết kế biên dạng răng của bánh răng không tròn trên cơ sở sử dụng bánh răng trụ tròn cycloid lệch tâm kết hợp với điều kiện đối tiếp của lý thuyết ăn khớp. Kết quả nghiên cứu này có ý nghĩa quan trọng trong chế tạo các bộ truyền bánh răng không tròn mới, ứng dụng trong thiết kế và chế tạo các cơ cấu máy phục vụ sản xuất.

Từ khóa: Bánh răng không tròn, biên dạng răng Cycloid, Epicycloid, Hypocycloid.

### Abstract

Non-circular gears have recently been researched and developed for converting movement in some special cases as well as in continuously variable transmission. However, most of the research on this topic are focused on the non-circular gears with involute profile. In order to design the non-circular gear-train with cycloidal profile (including epicycloid and hypocycloid), the authors present a method to determine profile of the non-circular gear based on application of the cylindrical cycloidal eccentric gearing combining with meshing condition of the gearing theory. The achieved results of this work are useful for manufacture of the new non-circular gear-trains.

Keywords: Non-circular gear, Cycloidal gear profile, Epicycloid, Hypocycloid.

### 1. Đặt vấn đề

Trước đây bánh răng không tròn (BRKT) không được ứng dụng rộng rãi trong công nghiệp bởi quá trình thiết kế, chế tạo quá phức tạp [1]. Các nhà nghiên cứu và kỹ thuật đã rất nỗ lực nghiên cứu ứng dụng BRKT vào thiết kế máy và thiết bị tự động. Tuy nhiên, trở ngại lớn nhất là chưa có giải pháp hiệu quả để phát triển lý thuyết bao hình trong việc tạo hình BRKT. Bước đột phá được bắt đầu từ năm 1949 bởi Litvin, khi ông phát triển lý thuyết ăn khớp dựa trên dụng cụ tạo hình ăn khớp với BRKT [2]. Cho đến ngày nay, giá thành gia công chế tạo BRKT đã tiệm cận với bánh răng trụ tròn có tỷ số truyền không đổi, dẫn đến BRKT đã trở thành chủ đề nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trên thế giới [3] và có ba xu hướng nghiên cứu về BRKT: (i) Các phương pháp tổng hợp đường lăn của cặp BRKT có đường: lăn kín, đường lăn hở, đường lăn lồi, đường lăn lõm để hình thành các hệ BRKT khác nhau (hệ thường, hệ hành tinh v.v...) [4-7]; (ii) Phương pháp tổng hợp biên dạng thân khai trong thiết kế BRKT phương pháp: bao

hình, giải tích, kiểm tra cắt lẹm chân răng [8-10]; (iii) Các giải pháp gia công BRKT biên dạng thân khai như: phay lăn răng, mài, cắt dây cũng như nghiên cứu ứng dụng tạo ra các thiết bị mới trên cơ sở bộ truyền BRKT [11-13].

Tuy nhiên, theo tìm hiểu của nhóm tác giả cho thấy chưa có một nghiên cứu nào đề cập đến ứng dụng các đường cong khác như: đường cong cycloid, cung parabol [14], cung tròn của bánh răng Novikov v.v... vào thiết kế BRKT, mặc dù trong bánh răng trụ tròn có tỷ số truyền không đổi đã được dùng hiệu quả. Vì vậy, trong nghiên cứu này chúng tôi trình bày giải pháp ứng dụng họ đường cong cycloid đường epicycloid và hypocycloid trong thiết kế biên dạng cặp BRKT ăn khớp ngoài bằng cách dùng bánh răng sinh là bánh răng trụ tròn cycloid lệch tâm để tạo hình cho BRKT.

### 2. Thiết kế đường lăn của cặp bánh răng không tròn ăn khớp ngoài

#### 2.1. Phương trình đường lăn $\Sigma^1$ của bánh răng trụ tròn lệch tâm

Nếu gọi đường tròn  $\Sigma^1(O, R_1)$  quay quanh tâm quay  $O_1$  là đường lăn của bánh răng trụ tròn lệch tâm;

\*Địa chỉ liên hệ: Tel.: (+84) 913.530.121  
Email: thai.nguyenhong@hust.edu.vn

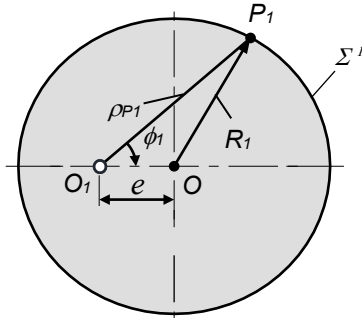
$P_1$  là một điểm bất kì trên  $\Sigma^1$ ;  $\rho_{P_1}(\phi_1)$  là bán kính cực (khoảng cách từ  $O_1$  đến  $P_1$ ),  $e = OO_1$  là khoảng cách từ  $O_1$  tới  $O$ . Xét  $\Delta OO_1P$  (Hình 1) ta có:

$$e^2 + \rho_{P_1}^2(\phi_1) - R_1^2 - 2e\rho_{P_1}(\phi_1)\cos\phi_1 = 0 \quad (1)$$

Từ phương trình (1), ta có bán kính cực  $\rho_{P_1}(\phi_1)$  được cho bởi:

$$\rho_{P_1}(\phi_1) = (R_1^2 + e^2 \sin^2 \phi_1)^{0.5} + e \cos \phi_1 \quad (2)$$

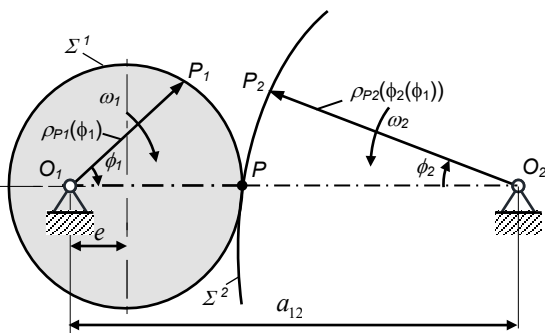
Với  $\phi_1$  là góc cực khi quay ở tâm quay  $O_1$  lệch tâm.



**Hình 1.** Đường lăn của bánh răng trụ tròn lệch tâm

**2.2. Xác định đường lăn  $\Sigma^2$  của bánh răng không tròn đối tiếp với bánh răng trụ tròn lệch tâm**

Nếu gọi:  $a_{12}$  là khoảng cách trục của cặp BRKT (Hình 2);  $\Sigma^2$  là đường lăn của BRKT đối tiếp với đường lăn  $\Sigma^1$  của bánh răng trụ tròn lệch tâm;  $P_2$  là điểm  $\in \Sigma^2$ ;  $\phi_1, \phi_2$  lần lượt là góc quay của bánh răng 1 quanh tâm quay  $O_1$  và bánh răng 2 quanh tâm  $O_2$  để đưa điểm  $P_1$  trên  $\Sigma^1$  về trùng với  $P_2$  của  $\Sigma^2$  tại tâm ăn khớp P nằm trên đoạn  $O_1O_2$ ,  $P_2 \equiv P_1 \equiv P$  khi đó  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^2$  vừa quay quanh tâm quay của bánh răng 1 và bánh răng 2, vừa lăn không trượt trên nhau. Bài toán đặt ra là xác định tham số:  $\phi_2(\phi_1)$ ,  $\rho_{P_2}(\phi_2(\phi_1))$  của  $\Sigma^2$  theo  $\Sigma^1$ .



**Hình 2.** Xác định đường lăn  $\Sigma^2$  của bánh răng 2 theo  $\Sigma^1$  của bánh răng trụ tròn lệch tâm

Từ Hình 2, xét tại thời điểm  $P_2 \equiv P_1 \equiv P$  khi đó

bán kính cực  $\rho_{P_2}(\phi_2(\phi_1))$  của  $\Sigma^2$  được cho bởi:

$$\rho_{P_2}(\phi_2(\phi_1)) = a_{12} - \rho_{P_1}(\phi_1) \quad (3)$$

Như vậy, tỷ số truyền của cặp bánh răng:

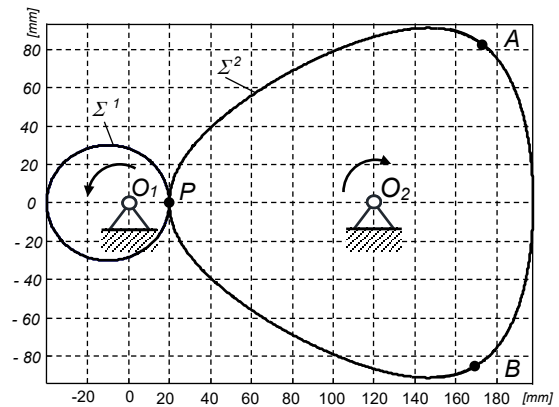
$$i_{12}(\phi_1) = \frac{a_{12}}{\rho_{P_1}(\phi_1)} - 1 \quad (4)$$

Từ (4) và điều kiện lăn không trượt của  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^2$  trên nhau để bánh răng 2 quay hết một vòng thì bánh răng 1 quay hết  $n$  vòng ta có:

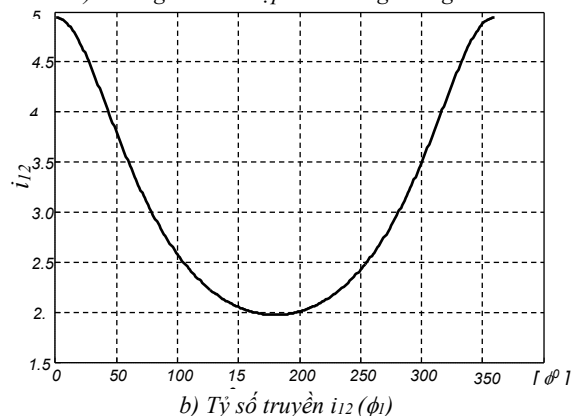
$$\frac{2\pi}{n} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_{P_1}(\phi_1)}{a_{12} - \rho_{P_1}(\phi_1)} d\phi_1 \quad (5)$$

Giải phương trình (5) xác định được khoảng cách trục  $a_{12} = a_{12}(n, R_1, e)$ , còn góc cực  $\phi_2(\phi_1)$  của  $\Sigma^2$  được cho bởi:

$$\phi_2(\phi_1) = \int_0^{\phi_1} \frac{\rho_{P_1}(\phi_1)}{a_{12} - \rho_{P_1}(\phi_1)} d\phi_1 \quad (6)$$



a) Đường lăn của cặp bánh răng không tròn



b) Tỷ số truyền  $i_{12}(\phi_1)$

**Hình 3.** Đường lăn của cặp bánh răng không tròn

Ví dụ áp dụng: với tham số đường lăn  $\Sigma^1$  của bánh răng trụ tròn lệch tâm:  $R_1 = 30$  mm,  $e = 10$  mm, chọn  $n = 3$  thay vào phương trình (5) và giải bằng tích phân số Simpson, ta xác định được khoảng cách trục

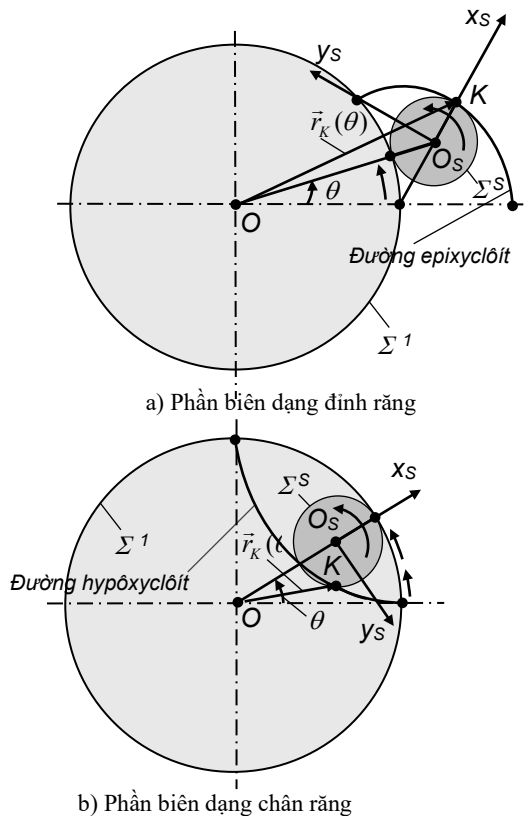
$a_{12} \approx 118.88$  mm, Hình 3 dưới đây là đường lăn và hàm tỷ số truyền của cặp bánh răng.

Từ Hình 3b ta dễ dàng nhận thấy tỷ số truyền của cặp BRKT biến đổi từ 2 đến 5, khi bánh răng 1 quay hết một vòng, còn bánh răng 2 quay hết một phần ba vòng từ điểm P đến điểm A (Hình 3a). Như vậy, khi bánh răng 2 quay hết một vòng sẽ tạo ra một chu kỳ biến thiên tuần hoàn là  $6\pi$ .

**3. Thiết kế biên dạng răng của cặp BRKT**

**3.1. Mô hình toán học của bánh răng trụ tròn lệch tâm**

Nguyên lý hình thành biên dạng răng  $\Gamma_1$  của bánh răng 1: Phần biên dạng đỉnh răng là đường cong Epicycloid được hình thành trên cơ sở một điểm K cố định trên đường tròn sinh  $\Sigma^S(O_s, r)$  khi  $\Sigma^S(O_s, r)$  lăn không trượt phía ngoài tâm tích bánh răng  $\Sigma^1(O, R)$  (Hình 4a), còn phần biên dạng chân răng là đường cong Hypocycloid được hình thành trên cơ sở một điểm K cố định trên đường tròn sinh  $\Sigma^S(O_s, r)$  khi  $\Sigma^S(O_s, r)$  lăn không trượt phía trong tâm tích bánh răng  $\Sigma^1(O, R)$  (Hình 4b).



**Hình 4.** Nguyên lý hình thành biên dạng răng của bánh răng cycloid

Phương trình biên dạng răng: với nguyên lý hình thành biên dạng như trên, theo [15] phương trình biên dạng

răng của bánh răng 1 khi xét tại tâm O được cho bởi:

$$\mathbf{r}_k(\theta) = \begin{bmatrix} (-1)^g r \cos\left[(2z_1 - (-1)^g)\theta\right] + r\left[2z_1 - (-1)^g\right] \cos\theta \\ -r \sin\left[(2z_1 - (-1)^g)\theta\right] + r\left[2z_1 - (-1)^g\right] \sin\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

trong đó:

+  $g = 1$  khi  $\Gamma_1$  là đường Epicycloid và  $g = 2$  khi  $\Gamma_1$  là đường Hypocycloid.

+  $\theta \in \left[ i \frac{\pi}{z_1}, (i+1) \frac{\pi}{z_1} \right]$  với  $i = 0 \div (2z_1 - 1)$  trong trường

hợp cung Epicycloid thì  $i$  chẵn còn cung Hypocycloid thì  $i$  lẻ.

+  $z_1$  là số răng của bánh răng 1.

Nếu xét tại tâm quay  $O_1$  (Hình 1, Hình 2) của bánh răng thì phương trình biên dạng được cho bởi:

$$\mathbf{r}_{k_1}(\theta) = \mathbf{r}_k(\theta) - [e \ 0]^T \quad (9)$$

Phân bố số răng trên bánh răng 1:

Nếu gọi  $T_{\Sigma^1}$  là bước răng trên vòng lăn  $\Sigma^1$  của bánh răng 1, khi đó  $T_{\Sigma^1}$  được cho bởi:

$$T_{\Sigma^1} = W_{\Sigma^1} + S_{\Sigma^1} = 4\pi r \quad (10)$$

Với:  $W_{\Sigma^1}, S_{\Sigma^1}$  lần lượt là rãnh răng và chiều dày răng trên  $\Sigma^1$ . Như vậy, chu vi  $C^{\Sigma^1}$  của  $\Sigma^1$  được cho bởi:

$$C^{\Sigma^1} = z_1 T_{\Sigma^1} = 2\pi R \quad (11)$$

Thay (10) vào (11) ta có mối quan hệ giữa  $z_1, R, r$ :

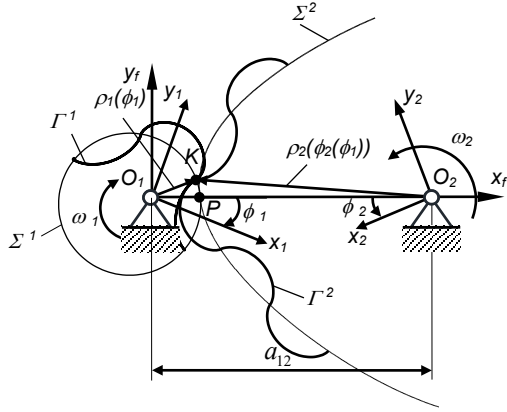
$$z_1 = \frac{R}{2r} \quad (12)$$

Trong công thức (12) nếu  $z_1$  không là số nguyên dương thì phải quay lại bài toán tổng hợp đường lăn sao cho vẫn đáp ứng được hàm truyền ban đầu thông qua hiệu chỉnh khoảng cách trục  $a_{12}(n, R_1, e)$  bằng cách hiệu chỉnh tham số  $e$ .

**3.2. Biên dạng răng của bánh răng không tròn đối tiếp với bánh răng cycloid trụ tròn lệch tâm**

**3.2.1. Thiết lập mô hình toán học mô tả biên dạng  $\Gamma_2$  của bánh răng 2**

Để thiết lập mô hình toán học mô tả biên dạng răng  $\Gamma_2$  của bánh răng 2, ăn khớp đối tiếp với biên dạng răng  $\Gamma_1$  của bánh răng 1 ta gọi:  $\mathcal{O}_1\{O_1x_1y_1z_1\}$  là hệ quy chiếu cố định gắn liền với giá;  $\mathcal{O}_1\{O_1x_1y_1z_1\}$  là hệ quy chiếu gắn bánh răng 1;  $\mathcal{O}_2\{O_2x_2y_2z_2\}$  là hệ quy chiếu gắn trên bánh răng 2; các tham số còn lại cho trên Hình 5.



**Hình 5.** Sơ đồ xác định biên dạng đối tiếp của bánh răng không tròn

Từ Hình 5 mô hình toán học mô tả biên dạng răng  $\Gamma_2$  của bánh răng 2 đối tiếp với biên dạng  $\Gamma_1$  của bánh răng 1 tại điểm ăn khớp  $K$  được cho bởi:

$$\mathbf{r}_{K_2} = {}^2\mathbf{M}_o \cdot {}^0\mathbf{M}_{O_1} \cdot {}^0\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{r}_{K_1} \quad (13)$$

Trong đó:

$${}^2\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2(\varphi_1) & \sin \varphi_2(\varphi_1) & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2(\varphi_1) & \cos \varphi_2(\varphi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{M}_{O_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thay (9) vào (13) sau khi biến đổi ta có:

$$\mathbf{r}_{K_2} = \begin{bmatrix} x_{K_1} \cos(\varphi_1 + \varphi_2(\varphi_1)) + y_{K_1} \sin(\varphi_1 + \varphi_2(\varphi_1)) - a_{12} \cos \varphi_2(\varphi_1) \\ x_{K_1} \sin(\varphi_1 + \varphi_2(\varphi_1)) + y_{K_1} \cos(\varphi_1 + \varphi_2(\varphi_1)) + a_{12} \sin \varphi_2(\varphi_1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Trong phương trình (14):

+ Mối quan hệ giữa  $\varphi_2$  và  $\varphi_1$  được xác định bởi:

$$\varphi_2(\varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{21}(\varphi_1)} \quad (15)$$

+ Mối quan hệ giữa  $\varphi_1$  và  $\theta$  được xác định từ điều kiện điều kiện đối tiếp của cặp biên dạng răng [16]:

$$f(\theta, \varphi_1) = \mathbf{n}_1 \times {}^{(1)}\mathbf{v}_{12} = 0 \quad (16)$$

Trong đó:  $\mathbf{n}_1$  là véc tơ pháp tuyến chung của  $\Gamma_1$  và  $\Gamma_2$  tại  $K$ , còn  $\mathbf{v}_{12}$  là vận tốc trượt tương đối giữa  $K_1 \in \Gamma_1$  và  $K_2 \in \Gamma_2$  tại điểm ăn khớp  $K$ , khi  $\Gamma_1$  và  $\Gamma_2$  trượt tương đối với nhau. Véc tơ  $\mathbf{n}_1$  được cho bởi:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_{K_1}(\theta)}{\partial \theta} \times \mathbf{k} \quad (17)$$

Với  $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$

Còn  ${}^{(1)}\mathbf{v}_{12}$  được cho bởi:

$${}^{(1)}\mathbf{v}_{12} = ({}^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1 - {}^{(2)}\boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{r}_{K_1} - (\mathbf{a}_{12} \times {}^{(2)}\boldsymbol{\omega}_1) \quad (18)$$

$${}^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{d\varphi_1}{dt} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^{(1)} \end{bmatrix}^T;$$

$${}^{(2)}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d\varphi_2}{dt} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega^{(2)} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{a}_{12} = [a_{12} \cos \varphi_1 \quad a_{12} \sin \varphi_1 \quad 0]^T$$

sau khi thay  ${}^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1$ ,  ${}^{(2)}\boldsymbol{\omega}_1$ ,  $\mathbf{a}_{12}$  vào công thức (18) và biến đổi thì:

$${}^{(1)}\mathbf{v}_{12} = \omega_1 \begin{bmatrix} (1 + i_{21}(\varphi_1))y_{K_1}(\varphi_1) - a_{12}i_{21}(\varphi_1) \sin \varphi_1 \\ (1 + i_{21}(\varphi_1))x_{K_1}(\varphi_1) + a_{12}i_{21}(\varphi_1) \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Thay (17, 19) vào công thức (16):

$$f(\theta, \varphi_1) = \frac{\partial y_1}{\partial \theta} ((1 + i_{21}(\varphi_1))y_{K_1}(\varphi_1) - a_{12}i_{21}(\varphi_1) \sin \varphi_1) + \frac{\partial x_1}{\partial \theta} ((1 + i_{21}(\varphi_1))x_{K_1}(\varphi_1) + a_{12}i_{21}(\varphi_1) \cos \varphi_1) = 0 \quad (20)$$

Rút gọn công thức (20) ta có:

$$f(\theta, \varphi_1) = (y'_{K_1}(\varphi_1)y_{K_1}(\varphi_1) + x'_{K_1}(\varphi_1)x_{K_1}(\varphi_1)) + (y'_{K_1}(\varphi_1) \sin \varphi_1 + x'_{K_1}(\varphi_1) \cos \varphi_1) \rho_{P_1}(\theta) = 0 \quad (21)$$

Giải phương trình (21) ta xác định được mối quan hệ giữa  $\theta$  và  $\varphi_1$ .

**Số răng của bánh răng 2 ( $z_2$ )**

Để xác định số răng của bánh răng 2 ta gọi:  $z_2$ ,  $T_{\Sigma^2}$ ,  $C^{\Sigma^2}$  lần lượt là số răng, bước răng và chu vi đường lăn của bánh răng 2, khi đó, theo lý thuyết ăn khớp để bánh răng 1 và bánh răng 2 ăn khớp đúng thì bước trên vòng lăn của hai bánh răng phải bằng nhau, vì vậy ta có:

$$T_{\Sigma^2} = T_{\Sigma^1} = 4\pi r \quad (22)$$

Mặt khác, do điều kiện lăn không trượt của  $\Sigma^1$  và  $\Sigma^2$ , ta có:

$$C^{\Sigma^2} = nC^{\Sigma^1} = z_2 T_{\Sigma^2} \quad (23)$$

Thay (11) vào (23) ta có:

$$z_2 = n_1 z_1 \quad (24)$$

Công thức (24) xác định số răng của bánh răng 2 theo bánh răng 1.

### 3.3. Điều kiện tránh cắt lẹm chân răng

Để đảm bảo điều kiện tránh cắt lẹm chân răng sau khi phân bố số răng trên các bánh răng, theo [17] thì:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{x_{K1}(\theta)}{\partial \theta} & -v_{12x} \\ \frac{f(\theta, \varphi_1)}{\partial \theta} & -\frac{f(\theta, \varphi_1)}{\partial \theta} \frac{d\varphi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{y_{K1}(\theta)}{\partial \theta} & -v_{12y} \\ \frac{f(\theta, \varphi_1)}{\partial \theta} & -\frac{f(\theta, \varphi_1)}{\partial \theta} \frac{d\varphi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Sau khi thay công thức (18, 21) vào (25) và biến đổi ta có:

$$\begin{cases} \Delta_1 = A_1 + B_1 C_1 = 0 \\ \Delta_2 = A_2 - B_1 C_1 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

trong đó:

$$A_1 = \frac{\rho_{K1} x'_{K1}}{\rho_{K2}} A'$$

$$A' = \left( \rho'_{K1} (y'_{K1} \sin \varphi_1 + x'_{K1} \cos \varphi_1) + \rho_{K1} (y'_{K1} \cos \varphi_1 - x'_{K1} \sin \varphi_1) \right)$$

$$B_1 = \left( 1 + \frac{\rho_{K1}}{\rho_{K2}} \right) y_{K1} - a_{12} \frac{\rho_{K1}}{\rho_{K2}} \sin \varphi_1$$

$$C_1 = y''_{K1} y_{K1} + y_{K1}'' + x''_{K1} x_{K1} + x_{K1}'' - \rho_{K1} (y''_{K1} \sin \varphi_1 + x''_{K1} \cos \varphi_1)$$

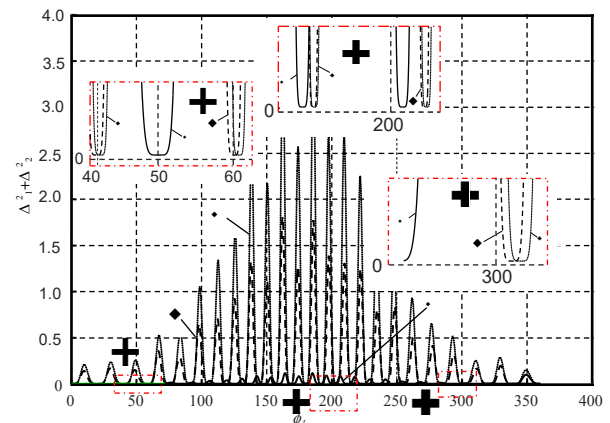
$$A_2 = \frac{\rho_{K1} y'_{K1}}{\rho_{K2}} \left( \rho'_{K1} (y'_{K1} \sin \varphi_1 + x'_{K1} \cos \varphi_1) + \rho_{K1} (y'_{K1} \cos \varphi_1 - x'_{K1} \sin \varphi_1) \right)$$

$$\rho_{K1} = \sqrt{\mathbf{r}_{K1}^T \mathbf{r}_{K1}}; \quad \rho_{K2} = \sqrt{\mathbf{r}_{K2}^T \mathbf{r}_{K2}}$$

Như vậy, bộ tham số thiết kế cặp BRKT phải thỏa mãn hệ phương trình (26), nếu không thỏa mãn thì cần phải hiệu chỉnh lại số răng trên các bánh răng của cặp BRKT.

### 4. Phân tích kết quả thiết kế

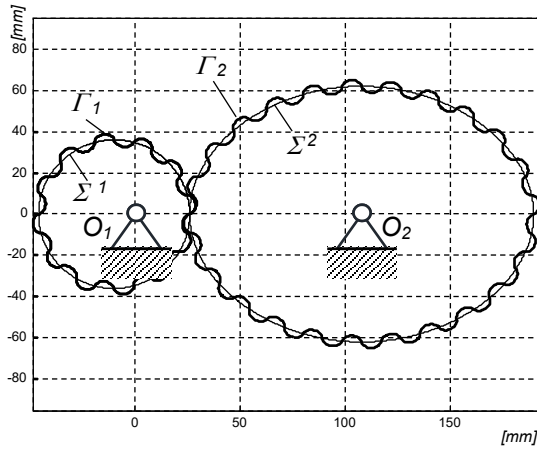
Từ phương pháp luận và mô hình toán học đã được thiết lập ở trên, trong phần này trình bày 3 phương án thiết kế cặp BRKT với cơ sở dữ liệu tính toán và phân bố số răng ở mỗi bánh răng được cho trong Bảng 1. Sau khi kiểm tra cắt lẹm chân răng bằng việc xác định đồ thị của  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2$  cho thấy  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0$  với mọi giá trị của  $\varphi_1$  (Hình 6), điều đó có nghĩa các phương án thiết kế ở Bảng 1 không có hiện tượng cắt lẹm chân răng. Trên cơ sở đó tiến hành lập trình thiết kế cặp BRKT bằng phần mềm Matlab ta có: Hình 7 BRKT biên dạng cycloid là bánh răng elíp được hình thành từ bánh răng trụ tròn cycloid lệch tâm có chu kỳ tuần hoàn  $4\pi$ ; Hình 9 BRKT là bánh răng ô van có chu kỳ tuần hoàn  $6\pi$ ; Hình 10 BRKT là bánh răng tứ giác có chu kỳ tuần hoàn  $8\pi$ . Từ Hình 7, Hình 8, Hình 9 cho thấy biên dạng răng không ảnh hưởng tới hàm truyền khi ăn khớp đúng và không có khe hở cạnh răng.



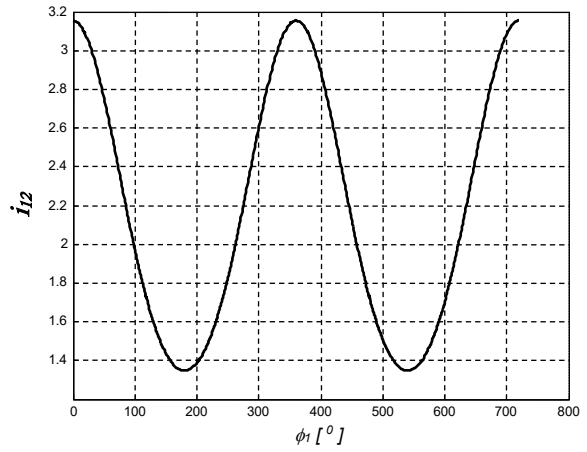
Hình 6. Kiểm tra điều kiện cắt lẹm chân răng

Bảng 1. Các phương án thiết kế cặp BRKT biên dạng cycloid

Tên gọi	Ký hiệu	Đơn vị	Phương án 1		Phương án 2		Phương án 3	
			BR <sub>1</sub>	BR <sub>2</sub>	BR <sub>1</sub>	BR <sub>2</sub>	BR <sub>1</sub>	BR <sub>2</sub>
Bán kính đường lẩn 1 $\Sigma^1(O, R)$	$R$	mm	36.00	....	37.50	....	24.00	....
Bán kính đường tròn sinh $\Sigma^S(O_S, r)$	$r$	mm	1.50	.....	1.25	.....	1.00	.....
Độ lệch tâm	$e$	mm	10.00	.....	15.00	.....	10.00	.....
Modul	$m$	mm	6	6	5	5	4	4
Số răng	$z$		12	24	12	36	12	48
Bước răng trên đường lẩn		mm	18.85	18.85	15.71	15.71	12.57	12.57
Độ dày răng trên đường lẩn		mm	9.42	9.43	7.85	7.85	6.28	6.28
Rãnh răng trên đường lẩn		mm	9.42	9.43	7.85	7.85	6.28	6.28
Khoảng cách trục	$a_{12}$	mm	108		148		117.34	
Số chu kỳ quay của bánh răng 1	$n$		2	1	3	1	4	1

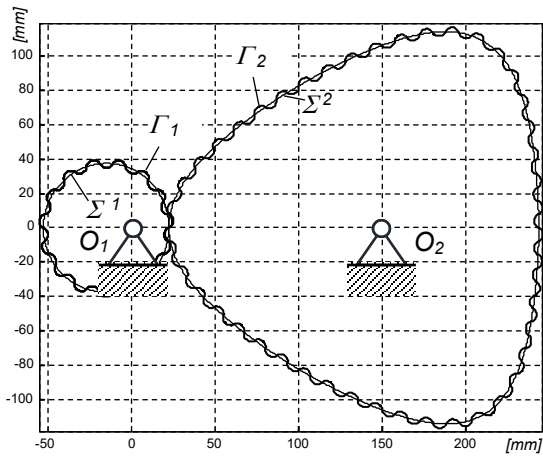


a) Bánh răng trụ tròn lệch tâm và bánh răng elip

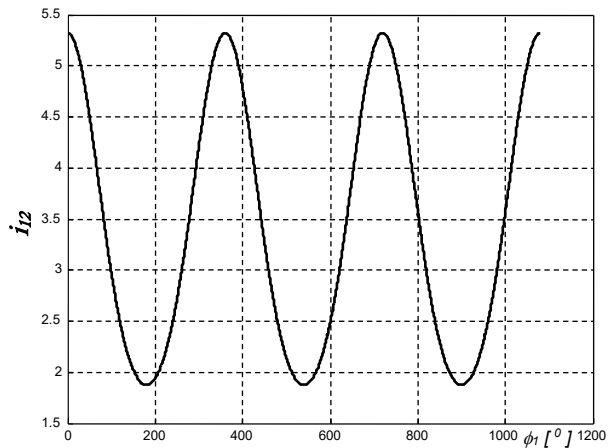


b) Tỷ số truyền  $i_{12}(\phi_1)$  với chu kỳ tuần hoàn bằng 2

**Hình 7.** Cặp BRKT được hình thành từ bánh răng trụ tròn lệch tâm và bánh răng elíp

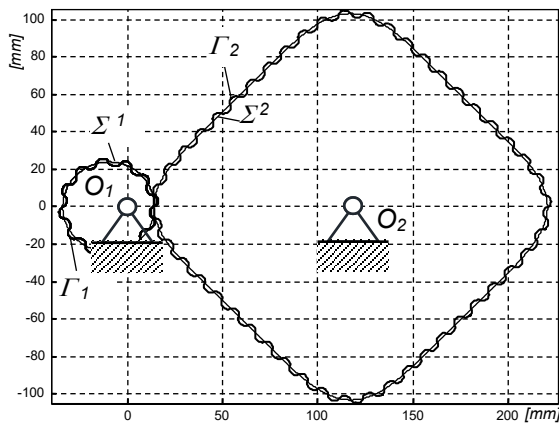


a) Bánh răng trụ tròn lệch tâm và bánh răng ô van

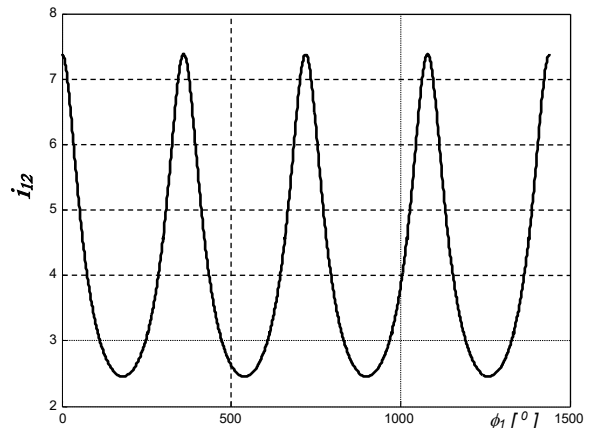


b) Tỷ số truyền  $i_{12}(\phi_1)$  với chu kỳ tuần hoàn bằng 2

**Hình 8.** Cặp BRKT được hình thành từ bánh răng trụ tròn lệch tâm và bánh răng ô van



a) Bánh răng trụ tròn lệch tâm và bánh răng ô van



b) Tỷ số truyền  $i_{12}(\phi_1)$  với chu kỳ tuần hoàn bằng 4

**Hình 9.** Cặp BRKT được hình thành từ bánh răng trụ tròn lệch tâm và bánh răng ô van

## 5. Kết luận

Mô hình toán học được thiết lập bởi nghiên cứu này cho phép thiết kế các cặp BRKT có biên dạng là đường cong cycloid đây chính là điểm mới của nghiên cứu này. Ưu điểm của thiết kế này so với biên dạng thân khai mà các công trình nghiên cứu khác về BRKT đã công bố là các răng luôn được cân đối và đều nhau (*do đặc điểm hình thành biên dạng đường tròn lăn không trượt trên đường lăn*), còn biên dạng thân khai thì các răng của bánh răng không tròn có độ dày không đều nhau dẫn đến yếu chân răng. Ngoài ra, kết quả nghiên cứu này có ý nghĩa thực tiễn trong việc chế tạo các loại BRKT mới phục vụ trong các cơ cấu và máy tự động của sản xuất công nghiệp như: hộp biến đổi tốc độ CVT của động cơ ô tô thể hệ mới, máy đột dập liên tục, thiết bị y tế v.v..

## Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ giáo dục và Đào tạo trong đề tài cấp Bộ mã số: B2019 - BKA - 09

## References

- [1] Vasie Marius, Andrei Laurentia, Technologies for Non-Circular Gear Generation and Manufacture, The annals of Dunărea de jos University of galati fasciclev, Technologies in machine builling (2010) 167-172.
- [2] Faydor L. Litvin, Ignacio Gonzalez-Perez, Kenji Yukishima, Alfonso Fuentes, Kenichi Hayasaka, Generation of planar and helical elliptical gears by application of rack -cutter, hob, and shaper, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 4321–4336.
- [3] Faydor L. Litvin, Ignacio Gonzalez-Perez, Alfonso Fuentes, Kenichi Hayasaka; Design and investigation of gear drives with non-circular gears applied for speed variation and generation of functions, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2008) 3783–3802.
- [4] Yazhou Wang, Bo Chen, Chibing Hu, Shutao Zhang, Te Li, Yongping Liu, Design of Third-order Non-circular Planetary Gear, Advanced Materials Research, Vols. 482-484 (2012) 305-308.
- [5] Cristescu Bogdan, Cristescu Ana, Andrei Laurentia, Algorithms For Noncircular Gear Pitch Curves Generation, Applied Mechanics and Materials, Vol. 658 (2014) 41-46.
- [6] Jian-neng Chen, Jiang-jun Yan, Liang Sun, Ming Zhou, Analysis of A Novel Traverse Mechanism Driven by Non-Circular Gears with Fourier Pitch-Line Applied on Silk Reeling Machine, Applied Mechanics and Materials, Vols. 536-537 (2014) 1295-1300.
- [7] Xin Zhang, Shouwen Fan, Synthesis of the steepest rotation pitch curve design for noncircular gear, Mechanism and Machine Theory 102 (2016) 16–35.
- [8] G. Yu. Volkov, D. A. Kurasov, M. V. Gorbunov, Geometric Synthesis of the Planetary Mechanism for a Rotary Hydraulic Machine, Russian Engineering Research. Vol. 38, No. 1 (2018) 1–6.
- [9] Fangyan Zheng, Lin Hua, Xinghui Han, BoLi, Dingfang Chen, Synthesis of indexing mechanisms with non-circular gears, Mechanism and Machine Theory 105 (2016) 108–128.
- [10] Fangyan Zheng, Lin Hua, Xinghui Han, BoLi, Dingfang Chen, Synthesis of indexing mechanisms with non-circular gears, Mechanism and Machine Theory 105 (2016) 108–128.
- [11] Fangyan Zheng, Han Xing hui, Lin Hua, Mingde Zhang, Wei qing zhang; Design and manufacture of new type of non-circular cylindrical geargenerated by face - milling method, MechanismandMachineTheory 122 (2018) 326–346.
- [12] Fangyan Zheng, Lin Hua, Xinghui Han, Bo Li, Non-uniform flank rolling measurement for shaped noncircular gears, Measurement. Volume 116 (2018) 207-215.
- [13] Lian Xia, Youyu Liu, Dazhu Li, Jiang Han, A linkage model and applications of hobbing non-circular helical gears with axial shift of hob, Mechanism and Machine Theory 70 (2013) 32–44.
- [14] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes, Ignacio Gonzalez-Perez, Luca Carnevali, Thomas M. Sep, New version of Novikov–Wildhaber helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 5707–5740.
- [15] Nguyen Hong Thai, Nguyen Thanh Trung; Establishing formulas for design of Roots pump geometrical parameters with given specific flow rate, Journal of Science and Technology. Volume 53. Number 4 (2015) 533-542, Doi: 10.15625/0866708X/53/4/3908.
- [16] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes, Gear Geometry and Applied Theory, Cambridge University Press (2004).
- [17] F.L. Litvin, Jan Lu, New Methods for Improved Double Circular-Arc Helical Gears, Report Army Research Laboratory, NASA (1997)