

# Thiết kế hình học và phân tích động học của hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh biên dạng xycloit

Geometric Design and Kinematics Analysis of Non - Circular Planetary Gear Train with Cycloid Profile

**Nguyễn Hoàng Việt, Nguyễn Hồng Thái\***  
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Hà Nội, Việt Nam  
\*Email: thai.nguyenhong@hust.edu.vn

## Tóm tắt

Nghiên cứu này trình bày phương pháp thiết kế hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh. Trong đó, khối bánh răng vệ tinh gồm bánh răng trụ tròn lệch tâm và bánh răng elíp có biên dạng xycloit được cho trước. Phương trình toán học của hai bánh răng không tròn trung tâm được thiết lập theo lý thuyết bánh răng có xét đến điều kiện cắt chân răng. Một chương trình tính toán số được viết trên phần mềm Matlab để tính toán thiết kế và phân tích động học hệ bánh răng này. Các ví dụ được trình bày trong bài báo làm sáng tỏ các bước thiết kế của phương pháp. Kết quả cho thấy bánh răng không tròn có biên dạng là đường xycloit khắc phục được hiện tượng răng không đều trên các bánh răng không tròn biên dạng thân khai truyền thống và khi cần thiết kế các bộ biến đổi biến đổi tốc độ vô cấp có biên độ lớn thì hiệu chỉnh hệ số  $\lambda = b/a$  hơn là hệ số  $\mu = e/R$ .

Từ khóa: Hệ bánh răng không tròn, đường lăn, biên dạng răng, bánh răng trụ tròn xycloit, bánh răng ô-van.

## Abstract

This research presents a method to design a non-circular planetary gear. Therein the satellite gear block consists of eccentric cycloidal gear and elliptical cycloidal gear, which have been given. The mathematical equations of two ring non-circular gears are set up according to the gearing theory considering the undercutting conditions. A numerical calculation program was written in Matlab to calculate and dynamically analyze this planetary gear. The examples presented in the paper clarified the design steps of the method. The simulation results show that the non-circular cycloidal gear can overcome the irregular tooth phenomenon on the traditional non-circular involute gear, and when it is necessary to design infinitely variable speed converters with large amplitudes, the coefficient  $\lambda$  should be adjusted rather than the coefficient  $\mu$ .

Keywords: Non-circular planetary gear, pitch curve, tooth profile, cycloidal gear profile, oval gear.

## 1. Đặt vấn đề

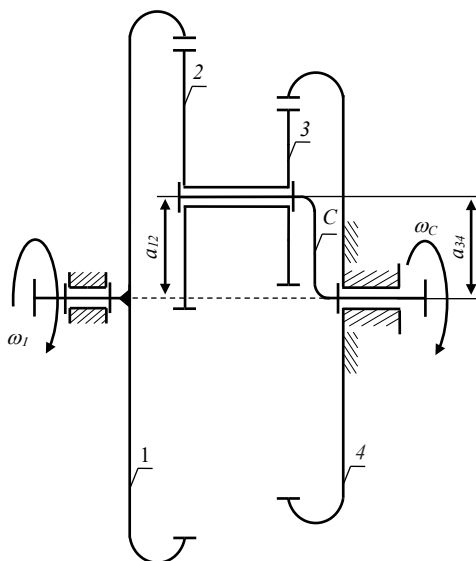
Bánh răng không tròn (BRKT) là sự kết hợp ưu điểm của bánh răng trụ tròn và cơ cấu cam, được sử dụng trong các bộ biến đổi tốc độ vô cấp với kích thước nhỏ gọn và kết cấu cơ khí đơn giản [1]. Do sự phức tạp trong thiết kế và khó khăn trong chế tạo đã làm hạn chế khả năng ứng dụng của BRKT trong thực tiễn. Tuy nhiên, với ưu điểm trong việc tạo ra các bộ biến đổi vô cấp mà không cần các chi tiết phụ, cùng với sự phát triển của công nghệ gia công tiên tiến. BRKT ngày càng được nghiên cứu, ứng dụng để thay thế các cơ cấu truyền thống trong máy móc, thiết bị như: Các cơ cấu máy nông nghiệp [2]; Hộp biến đổi tốc độ vô cấp của các phương tiện giao thông [3]; Thiết bị thủy lực [4] hay trong thiết bị y tế [5]; v.v.. Hiện nay việc ứng dụng BRKT không chỉ dừng lại ở việc sử dụng từng cặp bánh răng riêng lẻ, mà có xu hướng kết hợp các cặp BRKT với nhau tạo thành hệ

BRKT nhằm tạo ra các bộ biến đổi tốc độ có kích thước nhỏ gọn hơn. Do đó, đây là chủ đề nghiên cứu thu hút sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Nghiên cứu về hệ BRKT phải kể đến các nghiên cứu của: Litvin và cộng sự [6] đã nghiên cứu về hệ BRKT thường có biên dạng răng thân khai của đường tròn, cũng như điều kiện cắt lẹm khi tạo hình BRKT bằng thanh răng sinh. Mundo [7] đã đưa ra giải pháp tối ưu hệ BRKT hành tinh kép khi biết trước hàm truyền và khoảng cách trục một cặp, từ đó dựa trên kinh nghiệm của người thiết kế xác định thông số thiết kế các cặp còn lại trong hệ BRKT nhằm đảm bảo đường lăn của bánh răng trung tâm ngoài bao toàn bộ cặp bánh răng hành tinh phía trong, các trường hợp Mundo đưa ra đều có tâm quay của hai bánh răng trung tâm không trùng nhau và tâm quay của cân C với giá là tâm động dẫn đến kết cấu phức tạp và đòi hỏi gia công với độ chính xác cao. Lin và cộng sự [7] đã đưa ra giải pháp thiết kế hệ BRKT kiểu vi sai kép biên dạng răng thân khai của đường tròn với bánh răng vệ tinh có vành răng phía trong và vành răng ngoài để ăn khớp cùng lúc với hai BRKT trung tâm nhằm thỏa mãn điều kiện đồng trục

của hệ BRKT kiểu vi sai hai bậc tự do. Phương pháp này có ưu điểm là kích thước của bộ truyền nhỏ gọn nhưng lại có nhược điểm là chỉ phù hợp với bộ truyền có môđun nhỏ. Từ đó có thể thấy hầu hết các nghiên cứu về BRKT và hệ BRKT hiện tại đều sử dụng đường thân khai của đường tròn và có nhược điểm chung là các răng không đều ở các vị trí khác nhau trên BRKT, dẫn đến đòi hỏi người thiết kế phải có kinh nghiệm và kiến thức chuyên sâu mới có thể hiệu chỉnh các tham số thiết kế để các răng trên BRKT không bị quá chênh lệch nhau về hình dạng hình học và kích thước. Nhằm khắc phục những vấn đề nêu trên trong nghiên cứu này nhóm nghiên cứu sử dụng đường cong cycloid thay thế đường cong thân khai của đường tròn truyền thống làm biên dạng răng của hệ BRKT kiểu hành tinh. Để giải quyết vấn đề trên trong nghiên cứu này chúng tôi tiến hành: (i) Tổng hợp đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh với đường lăn của khối bánh răng vệ tinh là đường tròn lệch tâm và đường Ô-van tựa elíp; (ii) Sử dụng bánh răng sinh là các bánh răng vệ tinh với biên dạng răng cycloid để tạo hình biên dạng răng cho các BRKT trung tâm đồng thời xét đến điều kiện cắt lẹm chân răng; (iii) Khảo sát động học hệ bánh răng và tiến hành đánh giá ảnh hưởng của tham số thiết kế đặc trưng đến hàm tỷ số truyền của hệ BRKT.

## 2. Thiết kế đường lăn của hệ bánh răng không tròn

Trong phần này trình bày phương pháp tổng hợp đường lăn của hệ BRKT kiểu hành tinh có lược đồ như được mô tả trên Hình 1. Trong đó, đường lăn  $\Sigma_2$  của bánh răng 2 là đường tròn lệch tâm, đường lăn  $\Sigma_3$  của bánh răng 3 là đường elíp chính tâm. Bài toán đặt ra là: (1) Xác định đường lăn của hai BRKT trung tâm  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_4$ ; (2) Xác định điều kiện đồng trục của cặp bánh răng 1 - 2 và cặp bánh răng 3 - 4 để hệ có thể hoạt động.



Hình 1. Lược đồ hệ bánh răng hành tinh

### 2.1. Thiết kế đường lăn của cặp bánh răng không tròn 1 - 2

Theo [9] đường lăn  $\Sigma_2$  của bánh răng 2 được cho bởi:

$$r_2(\varphi_2) = \sqrt{(R^2 - e^2 \sin^2 \varphi_2)} - e \cos \varphi_2 \quad (1)$$

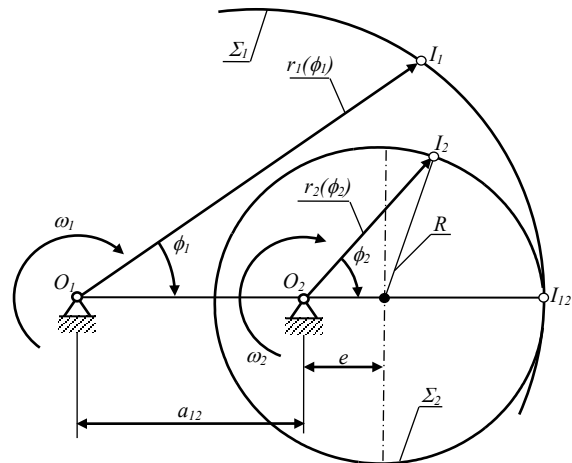
trong đó:  $R$  là bán kính đường tròn; còn  $e$  là độ lệch tâm giữa tâm quay và tâm hình học của đường tròn lăn  $\varphi_2 \in [0 \div 2\pi]$ . Như vậy, từ Hình 2 phương trình đường lăn  $\Sigma_1$  của BRKT trung tâm 1 được cho bởi:

$$\begin{cases} r_1(\varphi_1) = a_{12} + r_2(\varphi_2) \\ \varphi_1(\varphi_2) = \int_0^{\varphi_2} \frac{r_2(\varphi_2)}{a_{12} + r_2(\varphi_2)} d\varphi_2 \end{cases} \quad (2)$$

Khoảng cách trục  $a_{12}$  được xác định bởi:

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{r_2(\varphi_2)}{a_{12} + r_2(\varphi_2)} \right) d\varphi_2 \quad (3)$$

Với  $n_2$  là số vòng quay của bánh răng 2 để bánh răng 1 quay hết một vòng.



Hình 2. Đường lăn đối tiếp cặp bánh răng 1 - 2

Thay (1 và 2) vào (3) và áp dụng tích phân số Dwight [9] khoảng cách trục của cặp BRKT 1-2 được cho bởi:

$$a_{12}(R, e, n_2) = R(n_2 - 1) \left( 1 + 0.25(n_2 - 12) \left( \frac{e}{R} \right)^2 n_2^{-1} \right) \quad (4)$$

### 2.2. Thiết kế đường lăn của cặp bánh răng không tròn 3 - 4

Trong trường hợp này bánh răng 3 có đường lăn được cho trước là đường ôvan tựa elíp  $\Sigma_3$  có phương trình được cho bởi [10]:

$$r_3(\varphi_3) = \frac{2ab}{(a+b) - (a-b) \cos 2\varphi_3} \quad (5)$$

trong đó:  $r_3(\varphi_3)$  là bán kính cực của đường lăn  $\Sigma_3$ ;  $a, b$  lần lượt là bán trục lớn và bán trục nhỏ của  $\Sigma_3$ . Do đó, đường lăn  $\Sigma_4$  đối tiếp với  $\Sigma_3$  xác định bởi:

$$\begin{cases} r_4(\varphi_4) = a_{34} + r_3(\varphi_3) \\ \varphi_4(\varphi_3) = \int_0^{\varphi_3} \frac{r_3(\varphi_3)}{a_{34} + r_3(\varphi_3)} d\varphi_3 \end{cases} \quad (6)$$

Còn khoảng cách trục  $a_{34}$ :

$$\frac{2\pi}{n_3} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{r_3(\varphi_3)}{a_{34} + r_3(\varphi_3)} \right) d\varphi_3 \quad (7)$$

Với  $n_3$  là số vòng quay của bánh răng 3 để bánh răng 4 quay hết một vòng.

Thay (5 và 6) vào (7) và áp dụng tích phân Dwight [9] khoảng cách trục  $a_{34}$  của cặp BRKT 3 - 4 được cho bởi:

$$a_{34}(a, b, n_3) = \frac{1}{2} \left( (a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - 4ab(1-n_3^2)} \right) \quad (8)$$

### 2.3. Điều kiện đồng trục của hệ

Từ Hình 1, Hình 2 và Hình 3 để truyền mômen và tốc độ từ cặp BRKT 1 - 2 sang cặp BRKT 3 - 4, tức hệ hoạt động không bị kẹt răng thì  $a_{34}$  phải bằng  $a_{12}$  điều đó có nghĩa:

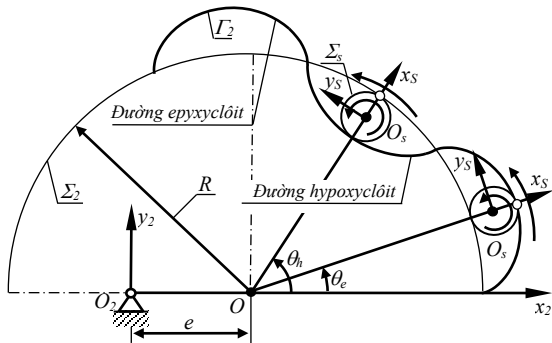
$$f(R, e, a, b, n_2, n_3) = a_{12}(R, e, n_2) - a_{34}(a, b, n_3) = 0 \quad (9)$$

## 3. Thiết kế các bánh răng không tròn trong hệ BRKT bằng bánh răng sinh biên dạng răng là đường xycloid

### 3.1. Xác định thông số thiết kế bánh răng không tròn trung tâm 1

#### 3.1.1. Phương trình biên dạng răng của bánh răng sinh 2

Biên dạng răng của bánh răng 3 là đường xycloid có biên dạng răng là đường epixycloid và chân răng là đường Hypoxycloid như được mô tả trên Hình 4.



Hình 4. Nguyên lý hình thành biên dạng bánh răng vệ tinh 2

Theo [11], phương trình biên dạng răng  $\Gamma_2$  so với tâm hình học  $O$  của đường tròn lăn  $\Sigma_2$  được cho bởi:

$$\mathbf{r}_{K_2}^*(\theta) = \begin{bmatrix} (-1)^g r \cos((2z_2 - (-1)^g)\theta) + r(2z_2 - (-1)^g) \cos \theta \\ -r \sin((2z_2 - (-1)^g)\theta) + r(2z_2 - (-1)^g) \sin \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

trong đó:  $r$  là bán kính đường tròn sinh  $\Sigma_s(O_s, r)$ ;  $z_2$  là số răng của bánh răng 2;  $\theta$  là góc cực như được mô tả trên Hình 4;  $g = 1$  khi  $\Gamma_2$  là đường epixycloid và  $g = 2$  khi  $\Gamma_2$  là đường hypoxycloid. Như vậy, trong hệ quy chiếu  $\mathcal{S}_2\{O_2, x_2, y_2\}$  của bánh răng 2 phương trình biên dạng răng  $\Gamma_2$  được cho bởi:

$$\mathbf{r}_{K_2}(\theta) = \mathbf{r}_{K_2}^*(\theta) - [e \ 0]^T \quad (11)$$

Do bánh răng 2 được chọn làm bánh răng sinh để tạo hình cho BRKT 1 và từ nguyên lý hình thành biên dạng răng đã được trình bày ở trên, thông số thiết kế được cho bởi:

Bước răng trên đường lăn:

$$p_2 = t_2 + w_2 = 4\pi r \quad (12)$$

trong đó:  $t_2, w_2$  lần lượt là chiều dày răng và chiều rộng rãnh răng  $t_2 = w_2 = 2\pi r$

Chiều cao răng:

$$h = h_f + h_a = 4r \quad (13)$$

Với  $h_f, h_a$  lần lượt là chiều cao chân răng và chiều cao đỉnh răng  $h_f = h_a = 2r$

Môđun được định nghĩa:

$$m_2 = \frac{p_2}{\pi} = 4r \quad (14)$$

#### 3.1.2. Tạo hình bánh răng trung tâm 1

Để thiết lập phương trình biên dạng răng của bánh răng trung tâm 1, coi cặp 1 - 2 là cặp bánh răng ăn khớp trong xét trên hệ quy chiếu  $\mathcal{S}_c\{O_c, x_c, y_c\}$  của cần  $C$  như được mô tả trên Hình 5, như vậy ta có phương trình biên dạng răng  $\mathbf{r}_{K_1}$  của bánh răng trung tâm 1 được cho bởi:

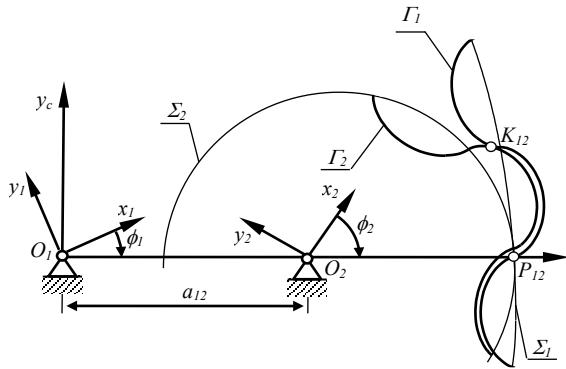
$$\mathbf{r}_{K_1} = {}^1\mathbf{M}_c {}^c\mathbf{M}_2 \mathbf{r}_{K_2} \quad (15)$$

Trong đó:  ${}^c\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1(\varphi_2) & -\sin \varphi_1(\varphi_2) & -a_{12} \\ \sin \varphi_1(\varphi_2) & \cos \varphi_1(\varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

${}^1\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; còn  $\mathbf{r}_{K_2}$  được xác định

từ phương trình (11). Khai triển (15) phương trình biên dạng răng  $\Gamma_1$  của BRKT 1 được viết lại:

$$\mathbf{r}_{K_1} = \begin{bmatrix} x_{K_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - y_{K_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a_{12} \cos \varphi_1 \\ x_{K_2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + y_{K_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a_{12} \sin \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$



Hình 5. Tạo hình biên dạng răng của bánh răng trung tâm 2

Trong phương trình (15) mối quan hệ giữa  $\varphi_2$  và  $\varphi_1$  được xác định bởi phương trình (2), còn mối quan hệ giữa  $\varphi_2$  và  $\theta$  được xác định thông qua phương trình ăn khớp:

$$\mathbf{n}_2 \times \mathbf{V}_{21} = 0 \quad (17)$$

trong đó:  $\mathbf{n}_2$  là véc tơ pháp tuyến chung của cặp biên dạng đối tiếp ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ),  $\mathbf{V}_{21}$  là vận tốc trượt tương đối giữa hai biên dạng ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ) tại điểm ăn khớp  $K_{12}$ ; còn véc tơ  $\mathbf{n}_2$  được cho bởi:

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_{K_2}(\theta)}{\partial \theta} \times \mathbf{k} \quad (18)$$

Với  $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{V}_{21}$  được cho bởi:

$$\mathbf{V}_{21} = ({}^{(2)}\boldsymbol{\omega}_2 - {}^{(1)}\boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{K_2} - (\mathbf{a}_{12} \times {}^{(1)}\boldsymbol{\omega}_2) \quad (19)$$

sau khi khai triển công thức (19) và biến đổi:

$$\mathbf{V}_{21} = \omega_2 \begin{bmatrix} (1 + i_{12}(\varphi_2)) y_{K_2}(\varphi_2) + a_{12} i_{12}(\varphi_2) \sin \varphi_2 \\ (1 + i_{12}(\varphi_2)) x_{K_2}(\varphi_2) + a_{12} i_{12}(\varphi_2) \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Thay (18 và 20) vào công thức (17) và rút gọn ta có:

$$f(\theta, \varphi_2) = (y'_{K_2}(\theta) y_{K_2}(\theta) + x'_{K_2}(\theta) x_{K_2}(\theta)) + (y'_{K_2}(\theta) \sin \varphi_2 + x'_{K_2}(\theta) \cos \varphi_2) r_2(\varphi_2) = 0 \quad (21)$$

Giải phương trình (21) ta xác định được mối quan hệ của  $\theta$  và  $\varphi_2$ .

### Thông số thiết kế của bánh răng trung tâm 1

Do cặp bánh răng 1 - 2 ăn khớp trong với nhau, vì

vậy phải cùng mô-đun do đó ta có:

$$m_1 = m_2 = 4r \quad (22)$$

Đề cặp bánh răng 1 - 2 ăn khớp khít và ăn khớp đúng đúng thì:

$$p_{c_1} = p_{c_2} = t_2 + w_2 = t_2 + w_2 = 4\pi r \quad (23)$$

Như vậy, số răng của bánh răng 1 được cho bởi:

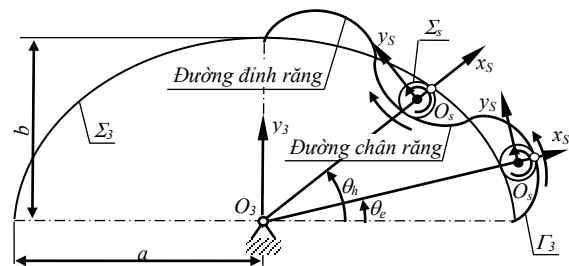
$$z_1 = \frac{C_{\Sigma_1}}{p_{c_1}} = \frac{n_2 C_{\Sigma_2}}{p_{c_2}} = n_2 z_2 \quad (24)$$

trong đó:  $C_{\Sigma_1}, C_{\Sigma_2}$  lần lượt là chu vi của đường lăn  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_2$ .

### 3.2. Xác định thông số thiết kế bánh răng không tròn trung tâm 4

#### 3.2.1. Phương trình biên dạng bánh răng sinh 3

Trong trường hợp này biên dạng răng của bánh răng 3 là quỹ tích của một điểm cố định trên đường tròn sinh, khi đường tròn này lăn không trượt phía ngoài và phía trong của elíp lăn như được mô tả trên Hình 6.



Hình 6. Nguyên lý hình thành biên dạng bánh răng vệ tinh 3

Theo [12], phương trình biên dạng răng  $\Gamma_3$  so với tâm  $O_3$  của đường elíp chính tâm  $\Sigma_3$  được cho bởi:

$$\mathbf{r}_{K_3}(\theta) = \begin{bmatrix} r \cos \gamma(\theta) + r \cos \xi(\theta) + r_3(\theta) \cos \theta \\ r \sin \gamma(\theta) + (-1)^g r \sin \xi(\theta) + r_3(\theta) \sin \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

Trong đó:  $r_3(\theta)$  được cho bởi (5); còn  $\gamma(\theta) = (-1)^g \xi(\theta) + \psi(\theta)$ ;

$$\xi(\theta) = \tan^{-1} \left( \frac{\partial x_{\Sigma_3}(\theta) / \partial \theta}{\partial y_{\Sigma_3}(\theta) / \partial \theta} \right);$$

$$\psi(\theta) = \frac{1}{r} \int_0^\theta \sqrt{\left( \frac{\partial x_{\Sigma_3}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{\Sigma_3}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2} d\theta; \quad r \text{ là bán}$$

kính đường tròn sinh  $\Sigma_3(O_s, r)$ ;  $g = 1$  khi  $\Gamma_3$  là biên dạng đỉnh răng và  $g = 2$  khi  $\Gamma_3$  là biên dạng chân răng.

### 3.2.2. Tạo hình bánh răng trung tâm 4

Trương tự đối với bánh răng 1, trong trường hợp này phương trình biên dạng răng  $r_{K_4}$  của bánh răng trung tâm 4 được cho bởi:

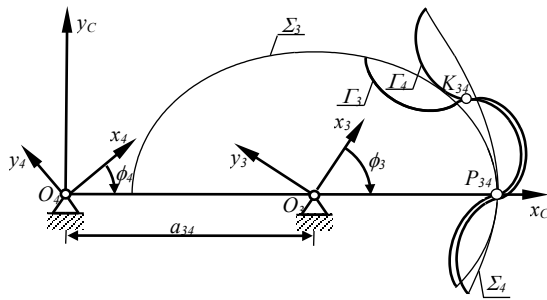
$$r_{K_4} = {}^4M_c {}^cM_3 r_{K_3} \quad (26)$$

trong đó:  ${}^cM_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_4(\varphi_3) & -\sin \varphi_4(\varphi_3) & -a_{34} \\ \sin \varphi_4(\varphi_3) & \cos \varphi_4(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

$${}^1M_c = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; r_{K_3} \text{ được xác định từ}$$

phương trình (25). Khai triển (26) phương trình biên dạng răng của BRKT 1 được viết lại:

$$r_{K_4} = \begin{bmatrix} x_{K_3} \cos(\varphi_4 - \varphi_3) - y_{K_3} \sin(\varphi_4 - \varphi_3) + a_{34} \cos \varphi_3 \\ x_{K_3} \sin(\varphi_4 - \varphi_3) + y_{K_3} \cos(\varphi_4 - \varphi_3) + a_{34} \sin \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$



Hình 7. Tạo hình biên dạng răng của bánh răng trung tâm 4

Trong phương trình (26) mối quan hệ giữa  $\varphi_3$  và  $\varphi_4$  được xác định bởi phương trình (6) còn mối quan hệ giữa  $\varphi_3$  và  $\theta$  được xác định tương tự như đối với bánh răng vệ tinh 2 thông qua phương trình ăn khớp, sau khi biến đổi ta có:

$$f(\theta, \varphi_3) = (y'_{K_3}(\theta)y_{K_3}(\theta) + x'_{K_3}(\theta)x_{K_3}(\theta)) + (y'_{K_3}(\theta)\sin \varphi_3 + x'_{K_3}(\theta)\cos \varphi_3)r_3(\varphi_3) = 0 \quad (28)$$

Giải phương trình (28) ta xác định được mối quan hệ  $\theta$  và  $\varphi_3$ .

#### Thông số thiết kế của bánh răng trung tâm 4

Cặp bánh răng 3 - 4 ăn khớp trong với nhau vì vậy phải cùng môđun, do đó ta có:

$$m_3 = m_4 = 4r \quad (29)$$

Để cặp bánh răng 3 - 4 ăn khớp khít và đúng thì:

$$p_{c_3} = p_{c_4} = t_3 + w_3 = t_4 + w_4 = 4\pi r \quad (30)$$

Như vậy số răng của bánh răng 4 được cho bởi:

$$z_4 = \frac{C_{\Sigma_4}}{p_{c_4}} = \frac{n_3 C_{\Sigma_3}}{p_{c_3}} = n_3 z_3 \quad (31)$$

Với  $C_{\Sigma_3}, C_{\Sigma_4}$  lần lượt là chu vi của đường lăn  $\Sigma_3$  và  $\Sigma_4$ .

#### 4. Tránh cắt lẹm chân răng

Theo [9], để trong quá trình tạo hình biên dạng của bánh răng sinh không cắt lẹm vào chân răng của bánh răng được tạo hình thì phương trình biên dạng răng phải thỏa mãn:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0 \quad (32)$$

trong đó:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{dx_{K_i}(\theta)}{d\varphi} & -V_{jix} \\ \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial f(\varphi_i)}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{dy_{K_i}(\theta)}{d\varphi} & -V_{j iy} \\ \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial f(\varphi_i)}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} \end{vmatrix}$$

Với:  $V_{jix}, V_{j iy}$  ( $i = 2, 3; j = 1, 4$ ) là các thành phần của vận tốc trượt trên biên dạng bánh răng sinh  $\Gamma_i$  tại điểm tạo hình  $K_{ij}$  được xác định tương tự mục 3.1, khai triển  $\Delta_1, \Delta_2$  ta có:

$$\begin{cases} \Delta_1 = A_1 + B_1 C_1 \\ \Delta_2 = A_2 - B_1 C_1 \end{cases} \quad (33)$$

Với:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{r_i x'_{K_i}}{r_j} (r'_i (y'_{K_i} \sin \varphi_i + x'_{K_i} \cos \varphi_i) + r'_i (y'_{K_i} \cos \varphi_i - x'_{K_i} \sin \varphi_i)) \\ B_1 = \left(1 + \frac{r_i}{r_j}\right) y_{K_i} - a_{ij} \frac{r_i}{r_j} \sin \varphi_i \\ C_1 = y''_{K_i} y_{K_i} + y_{K_i}^{\prime 2} + x''_{K_i} x'_{K_i} + x_{K_i}^{\prime 2} - r'_i (y''_{K_i} \sin \varphi_i + x''_{K_i} \cos \varphi_i) \\ A_2 = \frac{r_i y'_{K_i}}{r_j} (r'_i (y'_{K_i} \sin \varphi_i + x'_{K_i} \cos \varphi_i) + r'_i (y'_{K_i} \cos \varphi_i - x'_{K_i} \sin \varphi_i)) \end{cases}$$

Như vậy, bộ tham số thiết kế cặp BRKT phải thỏa mãn hệ phương trình (32), nếu không thỏa mãn thì cần phải hiệu chỉnh lại thông số thiết kế của đường lăn và biên dạng răng của cặp BRKT.

**5. Phân tích động học hệ bánh răng không tròn kiểu hành tinh**

Xét trong hệ quy chiếu của cần C:

$$\begin{cases} i_{12}^C = i_{12} = \frac{\omega_1 - \omega_C}{\omega_2 - \omega_C} \\ i_{34}^C = i_{34} = \frac{\omega_3 - \omega_C}{\omega_4 - \omega_C} \end{cases} \quad (34)$$

Vì bánh răng 2 và bánh răng 3 tạo thành khối bánh răng nên  $\omega_2 = \omega_3$  và BRKT trung tâm 4 cố định nên  $\omega_4 = 0$  do đó:

$$i_{14}^C = i_{12}^C i_{34}^C = \frac{\omega_1 - \omega_C}{-\omega_C} = 1 - i_{1C} \quad (35)$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} i_{12}^C = \frac{r_2(\varphi_2)}{a_{12} + r_2(\varphi_2)} \\ i_{34}^C = \frac{r_3(\varphi_3) + a_{12}}{r_3(\varphi_3)} \end{cases} \quad (36)$$

Thay phương trình (36) vào phương trình (35) biến đổi và rút gọn ta xác định được tỷ số truyền  $i_{1C}$ :

$$i_{1C} = 1 - \left( \frac{r_2(\varphi_2)}{a_{12} + r_2(\varphi_2)} \right) \left( \frac{r_4(\varphi_4)}{r_4(\varphi_4) - a_{34}} \right) \quad (37)$$

**6. Ví dụ thiết kế số**

*Ví dụ 1: Thiết kế thử nghiệm hệ BRKT kiểu hành tinh*

**Bảng 1.** Thông số thiết kế cặp bánh răng sinh biên dạng xycloit

Tên gọi	Ký hiệu	Bánh răng sinh	
		BR2	BR3
Bán kính đường lăn $\Sigma_2$ [mm]	R	24,63	-
Độ lệch tâm đường lăn $\Sigma_2$ [mm]	e	4,63	-
Bán trục lớn đường lăn $\Sigma_3$ [mm]	a	-	13,73
Bán trục nhỏ đường lăn $\Sigma_3$ [mm]	b	-	10,76
Bán kính đường tròn sinh [mm]	r	1,22	1,24
Môđun	m	4,88	4,96
Số răng	z	10,00	5,00
Bước răng trên đường lăn [mm]	p	15,33	15,52
Chiều dày răng [mm]	t	7,66	7,76
Chiều rộng rãnh răng [mm]	w	7,66	7,76
Chiều cao răng [mm]	h	4,88	4,96
Chiều cao đỉnh răng [mm]	h <sub>a</sub>	2,44	2,47
Chiều cao chân răng [mm]	h <sub>f</sub>	2,44	2,47

Từ phương pháp luận và mô hình toán học đã được thiết lập ở trên, trong nghiên cứu này nhóm tác giả đã viết chương trình tính toán, thiết kế số trên Matlab để tìm các thông số thiết kế của hệ BRKT kiểu hành tinh với thông số thiết kế khối bánh răng vệ tinh 2-3 được cho trong Bảng 1, còn các thông số thiết kế của BRKT trung tâm 1 và 4 được tính toán theo khối bánh răng vệ tinh 3 - 4 và được tổng hợp trong Bảng 2.

**Bảng 2.** Thông số thiết kế cặp bánh răng trung tâm biên dạng xycloit

Tên gọi	Ký hiệu	Bánh răng trung tâm	
		BR1	BR4
Hệ số vòng quay [vòng]	n	2	3
Môđun	m	4,88	4,96
Số răng [răng]	z	10,00	5,00
Bước răng trên đường lăn [mm]	p	15,33	15,52
Chiều dày răng [mm]	t	7,66	7,76
Chiều rộng rãnh răng [mm]	w	7,66	7,76
Chiều cao răng [mm]	h	4,88	4,96
Chiều cao đỉnh răng [mm]	h <sub>a</sub>	2,44	2,47
Chiều cao chân răng [mm]	h <sub>f</sub>	2,44	2,47
Khoảng cách trục [mm]	a <sub>ij</sub>	24,25	24,25

Sau khi kiểm tra thỏa mãn: (a) Điều kiện đồng trục phương trình (9); (b) Điều kiện cắt lẹm phương trình (32) Bảng 2 là bộ thông số thiết kế được chạy trên mô đun chương trình khi thiết kế BRKT trung tâm 1 và 4, còn Hình 8a là bản thiết kế biên dạng răng của hệ BRKT, Hình 8b bản thiết kế hệ BRKT, Hình 8c là đồ thị hàm tỷ số truyền  $i_{1C}$  của hệ.

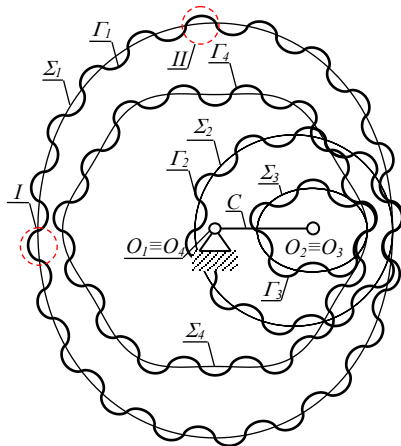
Từ Hình 8 nhận thấy các răng trên các BRKT trung tâm 1 và 4 đều bằng nhau ở mọi vị trí trên BRKT kể cả ở vị trí I có bán kính cong  $\rho = 74,23$  mm và vị trí II có bán kính cong  $\rho = 35,64$  mm như mô tả trên Hình 8a đây là ưu điểm của biên dạng này đồng thời hệ bánh răng vẫn đảm bảo truyền động mặc dù hai cặp bánh răng 1 - 2 và 3 - 4 có môđun khác nhau như được tổng hợp trong Bảng 1 và Bảng 2.

*Ví dụ 2: Khảo sát ảnh hưởng của hệ số lệch tâm  $\mu = e/R$  của bánh răng vệ tinh 2 và hệ số  $\lambda = b/a$  của bánh răng vệ tinh 3 đến tỷ số truyền hệ BRKT.*

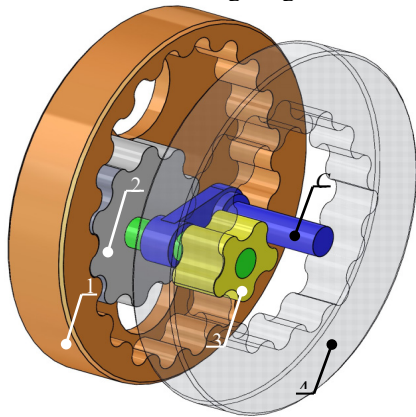
Trong ví dụ này, các phương án thiết kế đường lăn được tính toán số sao cho không làm thay đổi khoảng cách trục của hệ theo phương trình (9), số răng thiết kế biên dạng răng được chọn sao cho các bánh răng có số răng không đổi theo các phương trình (24, 30, 31) và được tổng hợp trong Bảng 3. Hình 9a thể hiện ảnh hưởng  $\mu$  của độ lệch tâm e đến hàm tỷ số truyền, còn Hình 9b mô tả ảnh hưởng của tỷ số bán trục elíp  $\lambda$  đến hàm tỷ số truyền của hệ BRKT kiểu hành tinh.

Bảng 3. Khảo sát ảnh hưởng của  $\mu$ ,  $\lambda$  đến tỷ số truyền

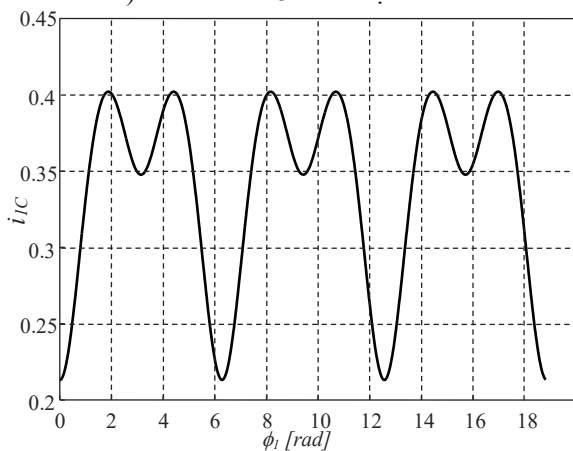
Trường hợp	$R$ [mm]	$e$ [mm]	$\mu$	$a$ [mm]	$b$ [mm]	$\lambda$
1	24,25	0,0	0,00	13,73	10,75	0,7
2	24,63	4,63	0,18			
3	30,00	11,73	0,39			
4	25,00	3,88	0,15	12,50	11,78	0,9
5				15,03	9,93	0,6
6				20,00	7,90	0,4



a) Bản thiết kế biên dạng răng của hệ BRKT

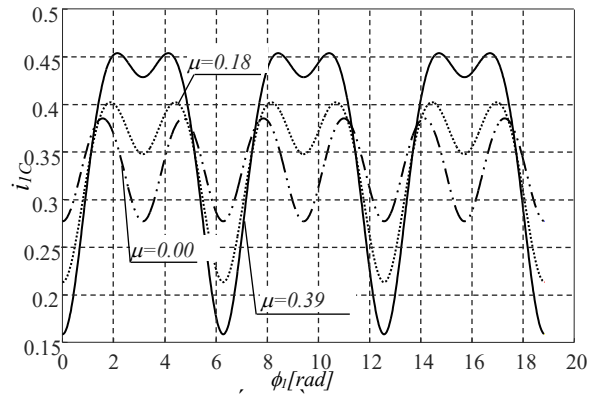


b) Bản thiết kế 3D của hệ BRKT

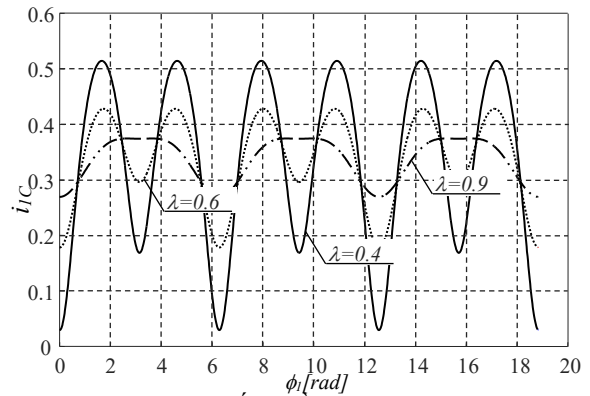


c) Hàm tỷ số truyền của hệ

Hình 8. Hệ BRKT kiểu hành tinh



a) Khảo sát tỷ số truyền hệ bánh răng theo  $\mu$



b) Khảo sát tỷ số truyền hệ bánh răng theo  $\lambda$

Hình 9. Ảnh hưởng của  $\lambda$ ,  $\mu$  đến tỷ số truyền

Từ Hình 9 nhận thấy sự thay đổi biên độ của hàm truyền phụ thuộc vào tỷ lệ  $\lambda$  bán trục lớn  $a$  và bán trục nhỏ  $b$  của bánh răng elíp 3 nhiều hơn là tỷ số  $\mu$  độ lệch tâm  $e$  của bánh răng trụ tròn 2. Vì vậy, trong các ứng dụng cần sự thay đổi lớn về biên độ của hàm truyền thì lựa chọn thay đổi hệ số  $\lambda$  hơn là hệ số  $\mu$  vì hàm truyền của hệ BRKT phụ thuộc và đường lẩn của các bánh răng trong hệ mà không phụ thuộc vào biên dạng răng. Cũng từ Hình 9 cho thấy hệ BRKT kiểu hành tinh này thường dùng cho các bộ biến đổi tốc độ tăng tốc.

## 6. Kết luận

Từ những phân tích đánh giá trên đây nghiên cứu này có một số đóng góp chính như sau:

- Đã xây dựng được các phương trình toán học phục vụ thiết kế hệ BRKT kiểu hành tinh có biên dạng răng là đường cong xycloid với ưu điểm là tất cả các răng trên BRKT trong hệ đều nhau về hình dạng và kích thước, khắc phục được hiện tượng răng không đều khi sử dụng đường thân khai của đường tròn làm biên dạng răng của các BRKT như các nghiên cứu truyền thống đã thực hiện.
- Điều kiện đồng trục của hệ BRKT cho phép thiết kế phần cố định cần C của khối bánh răng vệ tinh 2-3 đơn giản hơn các phương án thiết kế của Mundo [7] và của Lin [8] đã đề xuất.

- Khi cần thiết kế bộ biến đổi tốc độ kiểu tăng tốc cần biên độ hàm tỷ số truyền lớn thì hiệu chỉnh hệ số  $\lambda$  hơn là hệ số  $\mu$ .

#### **Lời cảm ơn**

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ giáo dục và Đào tạo trong đề tài cấp Bộ, mã số: B2019 -BKA -09.

#### **Tài liệu tham khảo**

- [1] F. L. Litvin, I. G. Perez, A. Fuentes and K. Hayasaka, Design and investigation of gear drives with non-circular gears applied for speed variation and generation of functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 (8) (2008) 3783-3802.  
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.03.001>
- [2] D. Mundo, G. Gatti and D. B. Dooner, Optimized five-bar linkages with non-circular gears for exact path generation, *Mechanism and Machine Theory*, 44 (4) (2009) 751-760.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.04.11>
- [3] Dooner, D. B, Function generation utilizing an eight-link mechanism and optimized non-circular gear elements with application to automotive steering, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, (2001) 847-857.  
<https://doi.org/10.1243/0954406011524090>
- [4] Kurasov, D, Geometric calculation of planetary rotor hydraulic machines, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 862 (2020) 1-6.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/862/3/032108>
- [5] Ottaviano, E., Mundo, D., Danieli, G. A., & Ceccarelli, M, Numerical and experimental analysis of non-circular gears and cam-follower systems as function generators, *Mechanism and Machine Theory*, 43 (8) (2008) 996-1008.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.07.004>
- [6] F.L. Litvin, Alfonso Fuentes-Azna, Ignacio Gonzalez-Perez, Kenichi Hayasaka, *Noncircular Gears Design and Generation*, Cambridge University Press (2009).  
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511605512>
- [7] D. Mundo, Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears, *Mechanism and Machine Theory* 41 (2006) 456-472.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2005.06.003>
- [8] Chao Lin, Xiguang Xia, Peilu Li, Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train, *Advances in Mechanical Engineering*, 10 (12) (2018) 1-12,  
<https://doi.org/10.1177/1687814018818910>
- [9] F.L. Litvin, Alfonso Fuentes, *Gear Geometry and Applied Theory*, Cambridge University Press (2004).  
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511547126>
- [10] Libardo V. Vanegas Useche, Magd M. Abdel-Wahab, Graham A. Parker, A new noncircular gear pair to reduce shaft accelerations: A comparison with sinusoidal and elliptical gears, *DYNA* 83 (198) (2016) 219-227.
- [11] Nguyen Hong Thai, Truong Cong Giang, Influence of geometrical dimensions on the profile slippage in the hypogenerator pump, *Journal of Science and Technology*. Vol 56, No 4. (2018) 482-491.  
<https://doi.org/10.15625/2525-2518/56/4/9625>
- [12] Tran Ngoc Tien, Nguyen Hong Thai, A novel design of the Roots blower, *Vietnam Journal of Science and Technology*, Vietnam Academy of Science and Technology 57 (2) 2019, 249-260,  
<https://doi.org/10.15625/2525-2518/57/2/13094>