العدد التخيلي

$$\sqrt{-1} = i$$

حيث i يسمى الجذر الرئيس للعدد -1 وهو وحدة تخيلية.

يكتب الرمز i يمين العدد المضروب فيه، ويسار كل من الجذور والمتغيرات.

$5i\ ,\ ix\ ,\ 2i\sqrt{14}$

مثال (1)

جد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i.

01 $\sqrt{-16}$

02 $\sqrt{-49}$

03 $\sqrt{-72}$

04 $\sqrt{-75}$

05 $\sqrt{-19}$

06 $\sqrt{\frac{-12}{25}}$

07 $\sqrt{\frac{-9}{32}}$

08 $\sqrt{-53}$

ضرب الأعداد التخيلية

ملاحظة مهمة

مثال (2)

جد ناتج كل مما يأتي بأبسط صورة مفترضًا أن $\sqrt{-1}=i$

01 $\sqrt{-8}\times\sqrt{-18}$

02 $\sqrt{-27}\times\sqrt{-48}$

03 $\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}$

04 $\sqrt{-4}\times\sqrt{-8}$

05 $5i\times\sqrt{-4}$

06 $\sqrt{-50}\times -4i$

07 $2i\times\sqrt{-9}$

08 $(i)(2i)(-7i)$

09 i^2

10 i^3

11 i^4

12 i^{15}

13 i^{2021}

14 i^{39}

15 i^{26}

16 i^{28}

الأعداد المركبة

الأعداد المركبة (C): هي الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية معًا، إضافة إلى حاصل جمع هذه الأعداد.

$$\mathbb{Z} = x + iy$$

x : الجزء الحقيقي

y : الجزء التخيلي

iy : العدد التخيلي

لأي عدد حقيقي يمكن كتابته على صورة $a + 0i$

لأي عدد تخيلي يمكن كتابته على صورة $0 + ib$

خاصية المساواة للأعداد المركبة

مفهوم أساسي:

يتساوى العدد المركبان: $a + ib \,, c + id$ **إذا وفقط إذا كان:** $a = c \,, b = d$

حيث a, b, c, d **أعداد حقيقية.**

مثال (3)

جد قيمة x وقيمة y اللتين تجعلان المعادلة:

$$2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$$

مثال (4)

جد قيمة x وقيمة y اللتين تجعلان المعادلة:

$$x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$$

مثال (5)

جد قيمة x وقيمة y اللتين تجعلان المعادلة:

01 $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

02 $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

03 $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

مثال (6)

مثّل العدد المركب ومرافقه بيانيًا في المستوى المركب في كل مما يأتي:

01 $z = -3 + 5i$

02 $z = 6 - 4i$

03 $z = 2i$

04 $z = 2 + 7i$

04 $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

تمثيل العدد المركب ومرافقه بيانيًا

للطالب:

05 $z = -3 - 2i$

06 $z = -3i$

07 $z = 5$

08 15

09 $z = -15 + 3i$

10 $z = 8 - 7i$

11 $z = 12 + 17i$

12 $z = -3 - 25i$

13 $3i$

14 -9

ملاحظة: الصورة القياسية للعدد المركب z هي:

$$z = a + ib$$

مثال (7)

أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة القياسية:

01 $\dfrac{2+\sqrt{-4}}{2}$

02 $\dfrac{8+\sqrt{-16}}{2}$

03 $\dfrac{10+\sqrt{-50}}{5}$

مثال (8)

حدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة الآتية، ثم مثلها جميعًا في المستوى المركب نفسه:

01 $z = 2 + 15i$

02 $z = 10i$

03 $z = -16 - 2i$

مقياس العدد المركب

للطالب:

مقياس العدد المركب $z = a + ib$ هو:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

حيث a, b عددان حقيقيان.

مثال (9)

جد مقياس كل عدد مركب مما يأتي:

01 $z = 3 - 4i$

02 $z = -3 - 6i\sqrt{2}$

03 $z = 12i$

04 $z = -2i$

05 $z = 4 + \sqrt{-20}$

مثال (10)

جد $|z|$ و $\overline{z}$ لكل مما يأتي:

01 $z = -5 + 5i$

02 $z = 3 + 3i\sqrt{3}$

03 $z = 6 - 8i$

سعة العدد المركب

للطالب:

مُلخَّص المفهوم — سعة العدد المُركَّب

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فإنَّ:

العدد المُركَّب z	الربع الذي يقع فيه z	$\mathrm{Arg}(z)$
$z = a + ib$	الأوَّل	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a + ib$	الثاني	$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a - ib$	الثالث	$-\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$
$z = a - ib$	الرابع	$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

مثال (11)

جد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتين عشريتين:

01 $z = 4 + 3i$

02 $z = 8 + 2i$

03 $z = -3 + 8i$

04 $z = -5 + 12i$

05 $z = -1 - 6i$

06 $z = -2 - 3i$

07 $z = 8 - 4i$

08 $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

09 $z = 1$

10 $z = -3$

11 $z = 3i$

12 $z = -4i$

13 $z = -5 - 5i$

14 $z = 1 - i\sqrt{3}$

15 $z = 6\sqrt{3} + 6i$

16 $z = 3 - 4i$

17 $z = -12 + 5i$

18 $-58 - 39i$

19 $z = 2i - 4$

الصورة المثلثية للعدد المركب

للطالب:

مفهوم أساسي

إذا كان: $z = a + ib$

فإن سعة العدد المركب: $Arg(z) = \theta$،

ومقياسه: $|z| = r$ يستعملان لكتابته بالصورة المثلثية كما يأتي:

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

مثال (12)

أكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

01 $|z| = 4\,,\,Arg(z) = \frac{\pi}{6}$

02 $|z| = 4\sqrt{2}\,,\,Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

03 $z = -2 - 5i$

04 $z = -4 - 4i$

05 $z = 2i$

06 $|z| = 2 \, , Arg\ z = \frac{\pi}{2}$

07 $|z| = 3 \, , Arg\ z = \frac{\pi}{3}$

08 $|z| = 7 \, , Arg\ z = \frac{5\pi}{6}$

09 $|z| = 1 \, , Arg\ z = \frac{\pi}{4}$

10 $z = 6$

11 $z = 1 + i$

مثال (13)

أكتب كلًّا من الأعداد المركبة بالصورة القياسية:

01 $6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

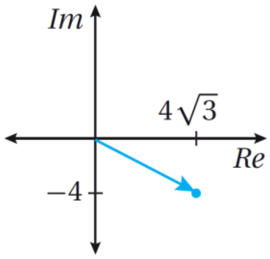
02 $12(\cos\pi + i\sin\pi)$

03 $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

04 $3\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

مثال (14)

يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المركب z_1 في المستوى المركب. جدالعدد المركب z_2 الذي يحقق ما يأتي:



$|z_2| = 40 \;\; and \;\; Arg\, z_2 = Arg\, \overline{z_1}$

مثال (15)

بافتراض أن: $z = a + ib$، حيث: $|z| = 10\sqrt{2}$

وأن: $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$:

1) أكتب العدد المركب z بالصورة القياسية.

2) جد قياسة الزاوية المحصورة بين z و $\overline{z}$

مثال (16)

إذا كان $z = -8 + 8i$ فجد كل مما يأتي:

01 $|z|$

02 $Arg\ (z)$

03 $|\,\overline{z}\,|$

04 $Arg(\,\overline{z}\,)$

مثال (17)

إذا كان: $z = 5 + im$ حيث:

$|z| = 6$ و $0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$ فجد قيمة العدد الحقيقي m

مثال (18)

إذا كان: $Arg(5 + 2i) = \alpha$ فجد سعة كل مما يأتي بدلالة α

01 $-5 - 2i$

02 $5 - 2i$

03 $-5 + 2i$

04 $2 + 5i$

05 $-2 + 5i$

مثال (19)

إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث $|z| = 13$ فجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة مبررًا إجابتك.

مثال (20)

بافتراض أن z_1 عدد مركب، مقياسه: $4\sqrt{5}$

وسعته: $\theta = \tan^{-1}(2)$

1) أكتب z_1 بالصورة القياسية.

2) إذا كان: $z_3 = -5 + i$ ، $z_2 = 7 - 3i$ فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه z_1 , z_2 , z_3 في المستوى المركب.

أسئلة كتاب التمارين

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1. $\sqrt{-128}$
2. $\sqrt{-14}$
3. $\sqrt{-81}$
4. $\sqrt{-125}$
5. $3\sqrt{-32}$
6. $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة، مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

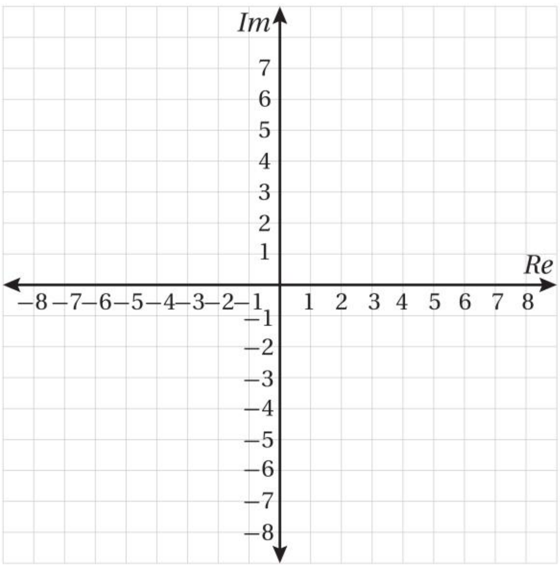
7. i^7
8. i^{12}
9. i^{98}
10. i^{121}

11. أملأ الفراغ بما هو مُناسِب في الجدول الآتي:

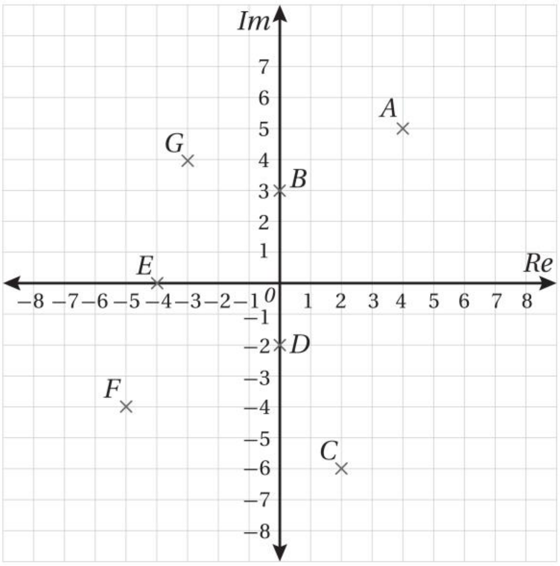
z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

أُمثِّل كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية في المستوى المُركَّب المجاور:

12. 5
13. -4
14. $4i$
15. $-3i$
16. $4-2i$
17. $-3+5i$
18. $-3-5i$
19. i
20. $7-4i$
21. $-5+4i$
22. $-7-2i$
23. $5+5i$



24 أكتب كُلًّا من الأعــداد المُركَّبة المُمثَّلــة بيانيًّا في المســتوى المُركَّب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته.



أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة ممّا يأتي صحيحة:

26 $i\,(2x - 4y) + x + 3y = 26 + 32i$

25 $(2x + 1) + 4i = 7 - i\,(y - 3)$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة المثلثية:

29 $-2\sqrt{3} - 2i$

28 $-5i$

27 6

32 $2 + 8i$

31 $4 - 2i$

30 $-1 + i$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة القياسية:

34 $12(\cos \pi + i \sin \pi)$

33 $6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

36 $3(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4})$

35 $8(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

أجد مُرافِق كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثم أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

39 $2 - 8i$

38 $9 - i$

37 $-1 - i\sqrt{5}$

42 $i - 8$

41 12

40 $-9i$

جمع الأعداد المركبة وطرحها

إذا كان: $z_1 = a + ib \, , z_2 = x + iy$ □

عدد مركبين، فإنه يمكن إيجاد ناتج جمعهما أوطرحهما على النحو التالي:

$$z_1 + z_2 = (a + x) + i(b + y)$$

$$z_1 - z_2 = (z - x) + i(b - y)$$

مثال (1)

جد ناتج كل مما يأتي:

01 $(5 + 7i) + (-9 - 4i)$

02 $(7 + 8i) + (-9 + 14i)$

03 $(8 - 5i) - (2 - 11i)$

04 $(11 + 9i) - (4 - 6i)$

ملاحظة:

النظير الجمعي للعدد المركب: $z = a + bi$

هو: $-z = -a - bi$

ضرب الأعداد المركبة

جد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

01 $5i\,(3 - 7i)$

02 $-3i\,(4 - 5i)$

03 $(6+2i)(7-3i)$

04 $(5+4i)(7-4i)$

05 $(5+4i)(5-4i)$

06 $(3+6i)^2$

قسمة الأعداد المركبة

مثال (1)

جد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

01 $\frac{8-5i}{3-2i}$

02 $\frac{-4+3i}{1+i}$

03 $\frac{3+5i}{2i}$

04 $\frac{2-6i}{-3i}$

05 $\frac{7i}{4-4i}$

مثال (2)

جد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

01 $(7+2i)+(3-11i)$

02 $(5-9i)-(-4+7i)$

03 $(4-3i)(1+3i)$

04 $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$

05 $(9-2i)^2$

06 $\frac{48+19i}{5-4i}$

07 $(2+3i)^3$

08 $(1-2i)^3$

09 $\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^3$

10 $(i-i^2)^3$

11 $\frac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

12 $\frac{(3-i)(1+2i)}{(2+i)(1-3i)}$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية

للطالب:

مفهوم أساسي:

إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$،

فإن:

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

مهم جدًا:

1) $|z_1z_2| = |z_1| \times |z_2|$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3) إذا كان: $-\pi < \theta_1+\theta_2 \le \pi$ فإن:

$$Arg(z_1z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

تذكر:

تقع السعة الرئيسة في الفترة: $-\pi < \theta \le \pi$

مثال (1)

إذا كان: $z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + isin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$ وكان: $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right)$

فجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

01 z_1z_2

02 $\frac{z_1}{z_2}$

مثال (2)

جد ناتج ما يأتي بالصورة المثلثية:

01 $6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

02 $6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\div 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

03 $6\,(\cos\pi+i\sin\pi)\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

04 $\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

05 $12\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

06 $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

الجذر التربيعي للعدد المركب

مثال (1)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$z = 21 - 20i$$

مثال (2)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$-5 - 12i$$

مثال (3)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$-9i$$

مثال (4)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال (5)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$3 - 4i$$

مثال (6)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$-15 + 8i$$

مثال (7)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$5 - 12i$$

مثال (8)

جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

$$-7 - 24i$$

الجذور المركبة لمعادلات كثيرات الحدود

للطالب

النظرية الأساسية في الجبر

يوجد جذر مركب واحد – على الأقل – لأي معادلة كثير حدود، درجتها أكبر من صفر.

التحليل المركب

لأي معادلة كثير حدود من الدرجة n، حيث $n \neq 0$ يوجد n من الجذور المركبة، بما في ذلك الجذور المكررة.

أمثلة:

$z^4 - 4z^2 + z^3 = 0 \rightarrow$ 4 جذور

$5z^2 - z^3 + 9 - 19 = 0 \rightarrow$ 3 جذور

$z^6 + 2z^5 - z + 7 = 0 \rightarrow$ 6 جذور

ملاحظة:

للمعادلة $x^2 = 0$ جذران، هما:

$x = 0$, $x = 0$؛ أي إن لها جذرًا مكررا مرتين.

مهم جدًا:

أنظر كتاب الطالب الصفحات $(161 - 163)$

- الجذور المركبة تأتي في صورة أزواج من الأعداد المركبة المترافقة.

مراجعة:

مثال (1)

جد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة:

$$z^3 + 4z^2 + z = 26$$

مثال (2)

جد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة:

$$z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$$

مثال (3)

حل كل من المعادلات التالية (جد الجذور الحقيقية والمركبة):

01 $z^2 + 104 = 20z$

02 $z^2 + 18z + 202 = 0$

03 $9z^2 + 68 = 0$

04 $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$

05 $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

06 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

07 $z^3 = 1$

08 $z^4 - 4z^2 = 24$

09 $z^4 + 12z^2 - 64 = 0$

مثال (4)

إذا كان $3 + 9i$ هو أحد جذور المعادلة:

$x^2 + ax + b = 0$ ، فأجد قيمة كل من a، b.

مثال (5)

إذا كان $2-i$ هو أحد جذور المعادلة:

$x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كل من a، b

مثال (6)

جد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كل مما يأتي:

01 $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

02 $(11-ia)-(b-9i)=7-6i$

03 $(a+ib)(2-i)=5+5i$

04 $\frac{a-6i}{1-2i}=b+4i$

مثال (7)

أضرب العدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مرافقه.

مثال (8)

إذا كان $z_3 = 2 - 2i$ ، $z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$ ، $z_1 = \sqrt{12} - 2i$ ، جد المقياس والسعة الرئيسة لكل مما يأتي:

01 $\frac{z_2}{z_1}$

02 $\frac{1}{z_3}$

03 $\frac{z_3}{\overline{z_2}}$

مثال (9)

إذا كان: $z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

a) أمثل العدد z بيانيًا في المستوى المركب.

b) جد الجذرين التربيعيين للعدد z

مثال (10)

إذا كان: $(a-3i)$، و $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $55-48i$، فجد قيمة كل من الثوابت الحقيقية a, b, c.

مثال (11)

جد معادلة تربيعية لها الجذران المركبان المعطيان في كل مما يأتي:

01 $2 \pm 5i$

02 $7 \pm 4i$

03 $-8 \pm 20i$

04 $-3 \pm 2i$

مثال (12)

إذا كان: $(4+11i)$ هو أحد جذري المعادلة: $z^2-8z+k=0$ حيث k عدد حقيقي، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

$a)$ جد الجذر الآخر للمعادلة.

$b)$ جد قيمة الثابت k

مثال (13)

إذا كان: $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

01 zw

02 $\frac{z}{w}$

03 $\frac{w}{z}$

04 $\frac{1}{z}$

05 w^2

06 $5iz$

مثال (14)

حل المعادلة المعطى أحد جذورها في كل مما يأتي:

01 $x^3 + x^2 + 15x = 225 , x = 5$

02 $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0 , -9$

03 $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37) , 6 - i$

04 $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0 , -2 + i$

مثال (15)

أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا، مبررًا اجابتي.

1) جد ناتج: $(p+iq)^2$، حيث p و q عددان حقيقيان.

2) إذا كان: $(p+iq)^2 = 45 + im$، حيث p و q عددان صحيحان موجبان، و $p > q$ ، فأجد ثلاث قيم ممكنة للعدد الحقيقي m

3) استعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $45 - 108i$

مثال (16)

أثبت أن: $z\,\bar{z} = |z|^2$ لأي عدد مركب z

مثال (17)

إذا كان z عددًا مركبًا، حيث $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$|z| = 5\sqrt{5}$، وكان: $\frac{z}{3+4i} = p + iq$، فأثبت أن:

$$P + q = 1$$

مثال (18)

العدد المركب: $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة: $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

جد بقية جذور هذه المعادلة، ثم حل المعادلة الآتية:

$$x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$$

كتاب التمارين

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $(6+8i)+(3-5i)$

2) $(-6-3i)-(-8+2i)$

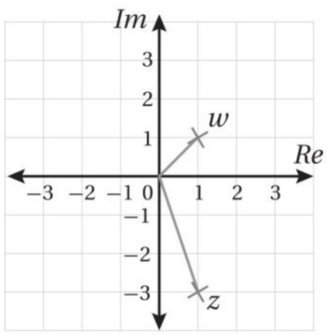
3) $4i(7-3i)$

4) $(8-6i)(8+6i)$

5) $(-2+2i\sqrt{3})^3$

6) $\frac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

مُعتمِدًا المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين z و w، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



7) أكتب كُلًّا من العددين z و w بالصورة القياسية.

8) أجد السعة والمقياس لكلٍّ من العددين المُركَّبين wz و $\frac{w}{z}$

9) أُمثِّل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المُركَّب.

إذا كان: $z=-3+3i\sqrt{3}$، وكان: $|w|=18, \text{Arg}(w)=-\frac{\pi}{6}$، فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

10) $\text{Arg}(z)$

11) $|z|$

12) $\text{Arg}(zw)$

13) $|zw|$

أجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

14) $-15+8i$

15) $-7-24i$

16) $105+88i$

17) إذا كان: $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، فأكتبه بالصورة المثلثية، مُبيِّنًا أنَّ $\omega^3=-1$.

إذا كان: $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$، وكان: $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

18 $z_1 z_2$

19 $z_1(\overline{z_1})$

20 z_2^3

21 $\frac{z_2}{z_1}$

22 إذا كان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$، فما قيمة u، علمًا بأنَّها سالبة؟

23 إذا كان: $(1+4i)$ جذرًا للمعادلة: $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb، والجذرين الآخرين لهذه المعادلة.

24 أجد قيمتي الجذر التربيعي: $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}$

25 أُثبِت أنَّ أحد الجذرين التربيعيين للعدد: $(7+24i)$ هو $(4+3i)$، ثم أجد الجذر التربيعي الآخر.

26 أُثبِت أنَّ سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$.

27 أُثبِت أنَّ مقياس $(7+24i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3i)$.

28 إذا كان: $\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1 - i$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb.

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

29 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

30 $z^3 + 4z^2 - 10z + 12 = 0$

31 إذا كان: $-2 + i$ هــو أحد جذور المعادلة: $z^4 + az^3 + bz^2 + 10z + 25 = 0$، فأجد قيمة a، وقيمة b، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة.

المحل الهندسي في المستوى المركب

المحل الهندسي

هو مجموعة النقاط في المستوى المُركَّب التي يُمكِن لنقطة (مُتحرِّكة ضمن شرط أو شروط) معادلة، أو متباينة أن تكون منها.

الدائرة

هي محل هندسي لنقطة تتحرَّك في مسار يبعد مسافة مُحدَّدة عن نقطة ثابتة هي مركز الدائرة.

مفهوم أساسي

المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تُمثِّله المعادلة $|z-(a+ib)|=r$ هو دائرة مركزها (a,b) وطول نصف قُطرها r وحدة.

مثال (1)

جد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة:

$|z-2+8i|=3$ ثم مثله بيانيًا في المستوى المركب ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال (2)

جد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة:

$|z+5-4i|=7$ ثم مثله في المستوى المركب، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال (3)

جد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم مثله في المستوى المركب، ثم جد معادلته الديكارتية:

01 $|z|=10$

02 $|z-9|=4$

03 $|z + 2i| = 8$

04 $|z - 5 + 6i| = 2$

05 $|z + \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$

06 $|z + 6 - i| = 7$

القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة

مثال (4)

إذا كانت: $|z - 5 - 3i| = 3$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب.

2) جد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة.

مثال (5)

إذا كانت: $|z + 4 - 4\sqrt{3}i| = 4$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب.

2) جد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة.

مثال (6)

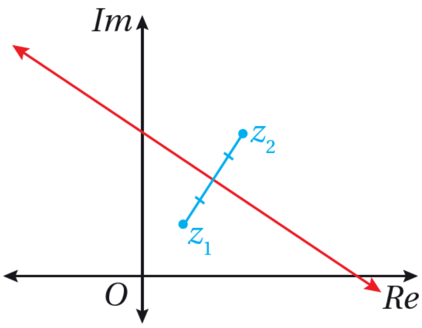
إذا كانت: $|z - \sqrt{5} - 2i| = 2$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب.

2) جد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة.

المنصف العمودي للقطعة المستقيمة

يُطلَق على المحل الهندسي للنقطة z التي تتحرَّك في المستوى المُركَّب، وتظلُّ على بُعْدين متساويين من النقطتين الثابتتين: z_1 و، z_2 اسم المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين الثابتتين كما في الشكل المجاور.



مفهوم أساسي

المحل الهندسي في المستوى المركب للنقطة z الذي تحقق المعادلة:

$$|z-(a+ib)| = |z-(c+id)|$$

هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: (a,b)، و (c,d).

مثال (7)

جد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة:

$$|z-3| = |z-2i|$$

ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال (8)

جد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة:

$$|z-3| = |z-2i|$$

ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال (9)

جد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم مثله في المستوى المركب، ثم جد معادلته الديكارتية:

01 $|z-5| = |z-3i|$

02 $|z+3i| = |z-7i|$

03 $|z + 5 + 2i| = |z - 7|$

04 $|z - 3| = |z - 2 - i|$

05 $\frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|} = 1$

06 $|z + 7 + 2i| = |z - 4 - 3i|$

الشعاع

مفهوم أساسي

المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تمثله المعادلة:

$$Arg\big(z-(a+ib)\big)=\theta$$

هو شعاع يبدأ بالنقطة (a,b) ويصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

مثال (10)

جد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم أرسمه في المستوى المركب:

01 $Arg(z-4i)=0$

02 $Arg(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$

03 $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

04 $Arg(z-5) = -\frac{2\pi}{3}$

05 $Arg(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$

06 $Arg(z-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

07 $Arg(z-4i) = -\frac{3\pi}{4}$

تمثيل المتباينات في المستوى المركب

مثال (11)

مثّل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

01 $|z-3|>5$

02 $|z-7| \leq |z+3i|$

03 $|z+3+i| \le 6$

04 $|z+3+i| < |z-4|$

05 $\frac{\pi}{4} < Arg(z+5) \le \frac{\pi}{2}$

06 $|z-2| < |z+2|$

07 $|z-4-2i| \leq 2$

08 $|z-4| > |z-6|$

09 $0 < Arg(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

10 $-\frac{\pi}{4} \leq Arg(z-3+4i) \leq \frac{\pi}{4}$

11 $2 \leq |z - 3 - 4i| \leq 4$

مثال (12)

أمثّل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $|z - 1 - 2i| \leq 5$

والمتباينة: $\frac{\pi}{4} < Arg(z - 1 - 2i) < \frac{2\pi}{3}$

مثال (13)

أمثّل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $|z + 3 - 2i| \geq 4$

والمتباينة: $-\frac{\pi}{2} < Arg(z - 2 + i) < \frac{\pi}{4}$

مثال (14)

أمثّل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $|z - 3| > |z + 2i|$

والمتباينة: $|z + 3 - i| < |z - 1 + 5i|$

مثال (15)

أمثّل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $-\frac{\pi}{2} < Arg(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$

والمتباينة: $|z+2-5i| > \sqrt{29}$

مثال (16)

أمثّل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $-\frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$

والمتباينة: $2 < |z-3+i| \leq 5$

مثال (17)

أمثّل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلة: $|z-3+2i|=\sqrt{10}$

والمعادلة: $|z-7+i|=|z-6i|$ ثم جد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معًا.

مثال (18)

أمثّل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية:

$$Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$$

$$Arg(z+2-5)=-\frac{\pi}{2}$$

$$|z+2-5i|=\sqrt{29}$$

مثال (19)

جد العدد المركب الذي يحقق كلًا من:

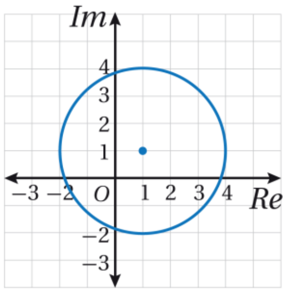
المحل الهندسي: $|z-3|=|z+2i|$

والمحل الهندسي: $|z+3-i|=|z-1+5i|$

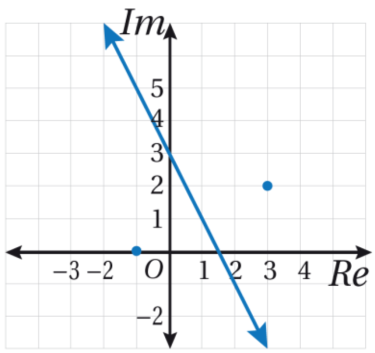
مثال (20)

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي الممثل بيانيًا في كل مما يأتي:

01

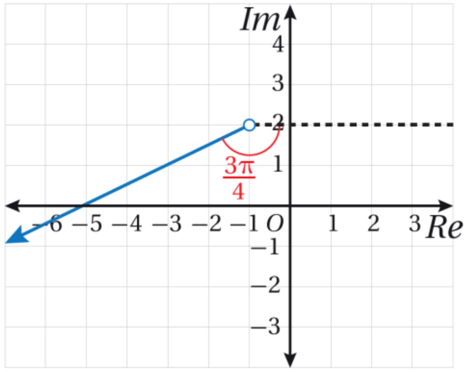


02



مثال (21)

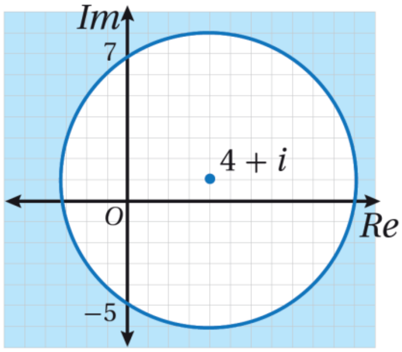
أكتب معادلة في صورة: $Arg(z-a)=\theta$ حيث a عدد مركب، $-\pi<\theta\leq\pi$ تمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المجاور.



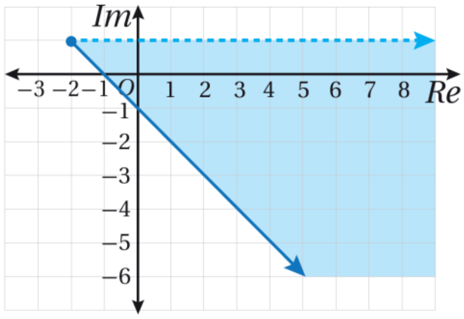
مثال (22)

أكتب بدلالة z متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي:

01

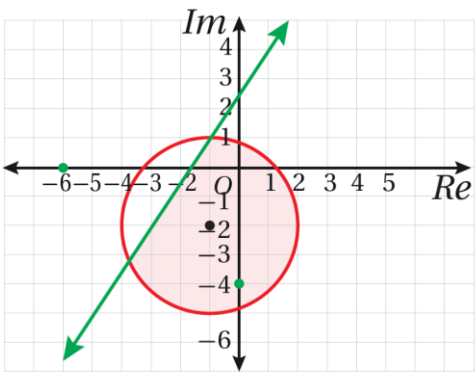


02



مثال (23)

أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المجاور.



مثال (24)

إجد (بدلالة الثابت الحقيقي a) العددين المركبين اللذين يحققان المعادلة: $|z-a| = 2a$

والمعادلة: $|z-a| = |z+a(2+i)|$

مثال (25)

إذا كان العدد المركب z يحقق المعادلة:

$|z-3+4i| = 2$، فأجد أكبر قيمة لـ $|z|$ وأقل قيمة له، مبررًا إجابتي

مثال (26)

إذا كانت: $z = 5 + 2i$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أبيّن أن: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{29}(21 + 20i)$

2) بناءً على البحث في سعة كل من الأعداد المركبة:

z , $\bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}}$ أبين أن:

$$2tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

مثال (27)

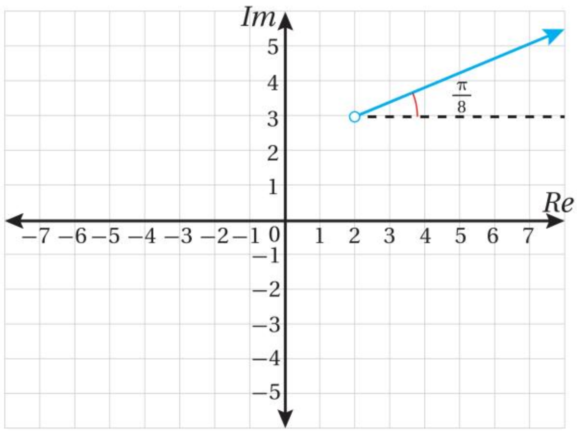
أثبت أن المعادلة: $|z - 6| = 2|z + 6 - 9i|$

تمثل دائرة، ثم جد مركزها ونصف قطرها.

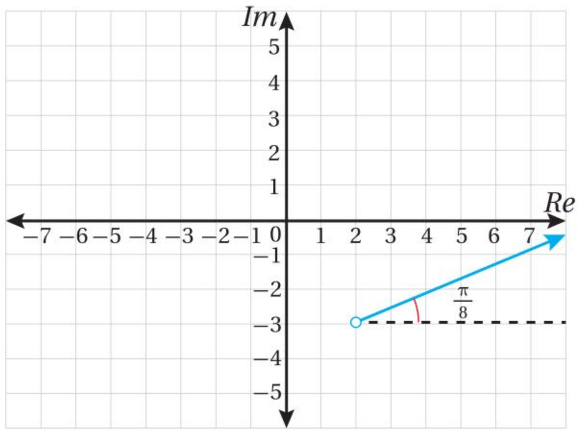
مثال (28)

أي الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته: $Arg(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ مبررًا إجابتك.

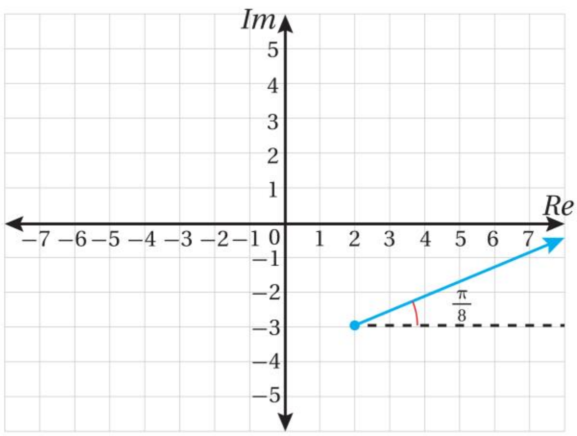
a)



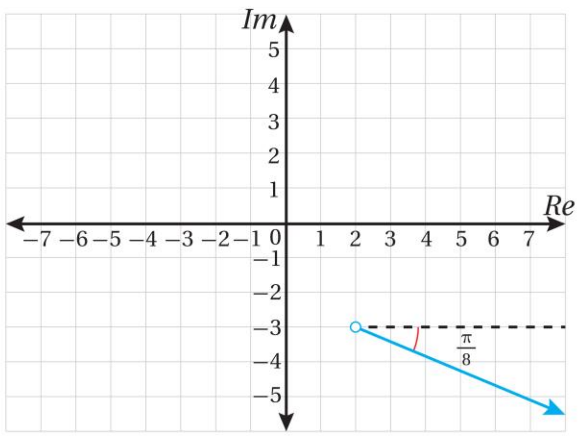
b)



c)



d)



كتاب التمارين

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب، وأجد معادلته الديكارتية:

1. $|z+5i|-3=1$
2. $|z-2+8i|=13$
3. $|z+4-3i|=7$
4. $|z+3+5i|=|z-i|$
5. $\dfrac{|z+3i|}{|z-6i|}=1$
6. $|6-2i-z|=|z+4i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب:

7. $\text{Arg}(z+3)=\dfrac{\pi}{4}$
8. $\text{Arg}(z+3-2i)=\dfrac{2\pi}{3}$
9. $\text{Arg}(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4}$

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل متباينة ممّا يأتي:

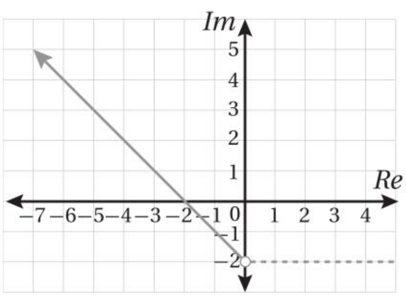
10. $0\le \arg(z-3i)\le \dfrac{3\pi}{4}$
11. $|z-2i|>2$
12. $|z|\le 8$

إذا كانت: $|z-5i|=3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

13. أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.
14. أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

15. أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z-1+i|\le 1$، والمتباينة: $-\dfrac{\pi}{3}<\text{Arg}(z)<0$.

16. أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط المُمثَّلة في المستوى المُركَّب المجاور.



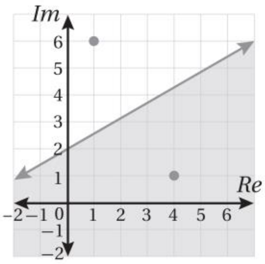
17 إذا كانــت: $u = -7 + 7i$، وكانــت: $v = 7 + 7i$، فأجد بصيغة: $|z - z_1| = r$ معادلــة الدائرة التي تمرُّ بنقطة الأصل، والنقطتين اللتين تُمثِّلان العددين المُركَّبين u، و v.

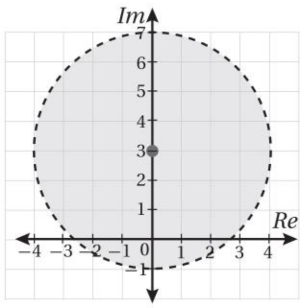
18 إذا كانت: $u = -1 - i$، فأجد u^2، ثم أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z| < 2$، والمتباينة: $|z - u^2| < |z - u|$.

19 أُمثِّل في المســتوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3i| = 13$، والمعادلــة: $\text{Arg}(z-4) = \frac{\pi}{4}$، ثم أجد العدد المُركَّب z الذي يُحقِّقهما معًا.

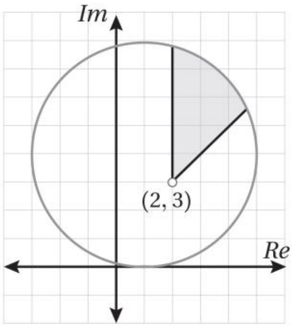
20 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3 - 2i| = 5$، والمعادلة: $|z - 6i| = |z - 7 + i|$، ثم أجد العددين المُركَّبين اللذين يُحقِّقان المعادلتين معًا.

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

21


22


23 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في الشكل الآتي:



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $i = \sqrt{-1}$، فإنَّ i^{343} تساوي:

a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i

2 ناتج $(1-i)^3$ هو:

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$

c) $2-2i$ d) $2+2i$

3 إذا كان $2i$ هو أحد جذور المعادلة:
$az^3 + 5z^2 + 8z + 20 = 0$، فإنَّ قيمة a هي:

a) -8 b) -2 c) 2 d) 8

4 الصورة المثلثية للعدد المُركَّب: $z = -1 + i\sqrt{3}$ هي:

a) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

b) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

c) $2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

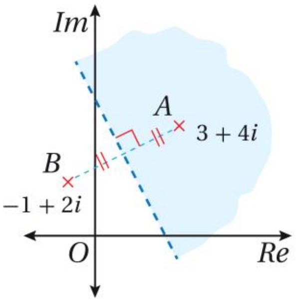
d) $2(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$

5 الصورة القياسية لناتج:
$$8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
هي:

a) $4i$ b) -4

c) $-4+4i$ d) $4-4i$

6 إحدى الآتية تصف المنطقة المُظلَّلة في الشكل المجاور:



a) $|z-1+2i| < |z+3+4i|$

b) $|z-1+2i| > |z+3+4i|$

c) $|z+1-2i| < |z-3-4i|$

d) $|z+1-2i| > |z-3-4i|$

7 أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z = 45 - 28i$.

8 أجد مقياس العدد المُركَّب: $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$، وسعته.

9 إذا كان: $z = -8 + 8i$، وكان: $w = a + 2i$، حيث $a < 0$، فأجد قيمة a، علمًا بأنَّ: $|z + w| = 26$.

إذا كان: $w = \frac{14-31i}{3-2i}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أكتب العدد w في صورة: $x + iy$.

11 إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة: $z^2 + cz + d = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين c، وd.

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

12 $|z-6| \le 3$

13 $\frac{\pi}{4} \le \text{Arg}(z-2) \le \frac{2\pi}{3}$

14 $|z+1+i| > |z-3-3i|$

اختبار نهاية الوحدة

إذا مثّلت النقطة M العـــدد: $z_1 = 1 - 8i$، ومثّلت النقطة N العـــدد: $z_2 = 4 + 7i$، وكانت O هي نقطة الأصل، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

15 أُبيِّن أنَّ المثلث OMN متطابق الضلعين.

16 أُبيِّن أنَّ جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$.

17 أجد مساحة المثلث OMN.

18 أُمثِّل في المســتوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التــي تُحقِّق المتباينة: $|z - 8| < |z + 2i|$، والمتباينة: $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z + 3 - 6i) < \frac{\pi}{4}$.

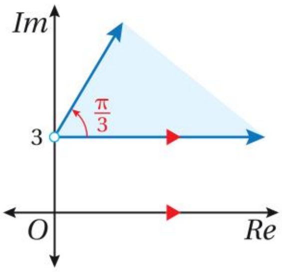
19 تقع رؤوس مثلث متطابق الأضلاع على دائرة مركزها نقطة الأصل في المســتوى المُركَّب. إذا كان أحد هذه الــرؤوس يُمثِّل العــدد المُركَّــب: $(4 + 2i)$، فأجد العددين المُركَّبين اللذين يُمثِّلهما الرأسان الآخران، ثم أكتب الإجابة في صورة: $x + iy$، حيث x، وy عددان حقيقيان.

تُمثِّل النقاط: A، وB، وC، وD جذور المعادلة:
$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$:

20 إذا كان العدد: $(-2 + 4i)$ هو أحد هذه الجذور، فأجد الجذور الثلاثة الأُخرى لهذه المعادلة.

21 أُمثِّل الجذور الأربعة في المســتوى المُركَّب، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

22 أكتب (بدلالة z) متباينة تُمثِّل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي:



إذا كان: $z^2 + 2z + 10 = 0$، فأُجيب عن الســؤالين الآتيين تباعًا:

23 أُبيِّن أنَّ لجذري المعادلة المقياس نفسه.

24 أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

إذا كان: $w = \frac{22 + 4i}{(2 - i)^2}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أُبيِّن أنَّ الصورة القياسية لهذا العدد هي: $w = 2+4i$.

26 إذا كان: $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(w + p) \leq \frac{3\pi}{4}$ ، فأجد مجموعة القِيَم المُمكِنة للعدد الثابت p.

27 يُحقِّــق العــددان المُركَّبــان u، و v، و المعادلــة: $u + 2v = 2i$، والمعادلــة: $iu + v = 3$. أحُــلُّ المعادلتين لإيجاد العدد u، والعدد v.

28 أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}\, z \leq \frac{2\pi}{3}$، والمتباينة: $|z - 2i| \leq 2$.

انتهت