ODROS ادرس

ادرس

في الرّياضيّات

العلمي

الفصل الثّاني

الوحدة الخامسة

المتجهات

شاملة لجميع الأسئلة (كتاب الطّالب وكتاب التّمارين)

الشّرح كاملاً على بطاقة منصّة ادرس جو

إعداد الأستاذ

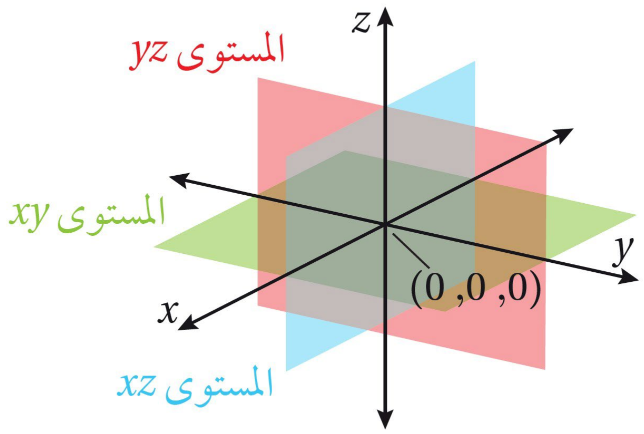
أ. أحمد إبراهيم المصري

إعداد المعلم: أحمد ابراهيم المصري 0788897923

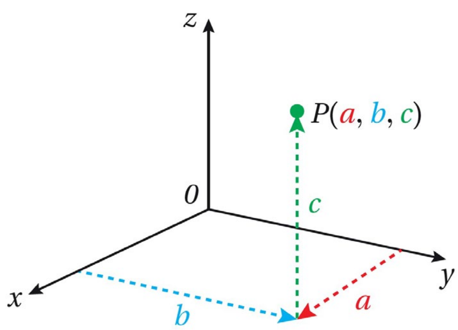
المتجهات في الفضاء

نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

ـ ينتج من إضافة المحور z ثلاثة مستويات، هي المستوى xy، والمستوى xz، والمستوى yz. وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى 8 أقسام، يُسمى كل منها الثمُن.



تحديد موقع النقطة $P(a, b, c)$ في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، أعين النقطة (a, b) في المستوى xy أولا، ثم أتحرك إلى الأعلى أو إلى الأسفل بموازاة المحور z، تبعًا لقيمة الإحداثي z وإشارته.



ـ نقطة تقاطع المحاور الإحداثية الثلاثة تسمى نقطة الأصل وهي $O\ (0, 0, 0)$

ـ يُحدد الثلاثي المرتب (x, y, z) موقع نقطة في الفضاء.

مثال 1 أعيّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

01 $A\,(2\,, 4\,, 3)$

02 $B(2\,, -3\,, -1)$

03 $(-3\,, 2\,, 4)$

04 $(1\,, 0\,, -4)$

05 $(5\,,-4,-2)$

06 $(-4\,,-2\,,3)$

المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

للطالب

مثال 2

إذا كانت: $A(2,1,-6), B(5,-3,6)$ فأجد كلًا مما يأتي:

01 المسافة بين A و B

02 إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$

مثال 3

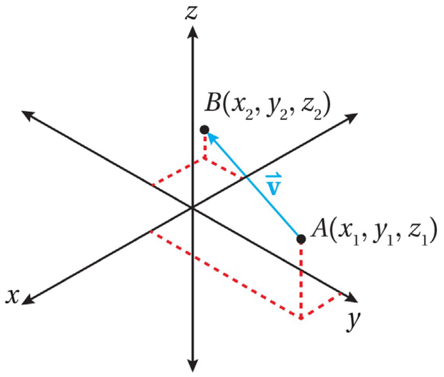
إذا كانت: $A(-4,7,-2), B(6,1,-4)$ فأجد كلًا مما يأتي:

01 المسافة بين A و B

02 إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$

المتجهات في الفضاء

مثَّل المتجهات في الفضاء بطريقة مُشابِهة لتمثيلها في المستوى الإحداثي. فالمتجه $\vec{v}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2\,, y_2\,, z_2)$ ، يُمثَّل في الفضاء بسهم، بدايته A، ونهايته B كما في الشكل المجاور، ويُرمَز إليه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ ، أو الرمز $\vec{v}$



يمكن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية عن طريق طرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية كما يأتي:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1\,, y_2 - y_1\,, z_2 - z_1\rangle = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$$

تسمى v_1, v_2, v_3 إحداثيات المتجه $\vec{v}$، ويعبر كل منها عن مقدار الإزاحة بالنسبة إلى المحور x أو المحور y أو المحور z

مقدار المتجه في الفضاء

إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1)\,, b(x_2, y_2, z_2)$ نقطتي بداية المتجه $\overrightarrow{AB}$ ونهايته، فإن:

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وإذا كان: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ، فإن:

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

مثال 4

إذا كان: $A(-3, 6\,, 1), B(4, 5\,, -2)$، فأكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية، ثم جد مقداره.

مثال 5

إذا كان: $A(-1\,, 5\,, 3), B(-5\,, 3\,, -2)$، فأكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية، ثم جد مقداره.

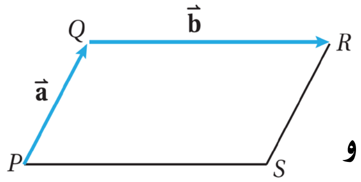
المتجهات في الفضاء

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًا

للطالب

معكوس المتجه $\vec{v}$ هو متجه له نفس مقدار المتجه $\vec{v}$ لكنه يكون في اتجاه معاكس له ويرمز إليه بالرمز $-\vec{v}$

مثال 6



في الشكل المجاور $QRSP$ متوازي أضلاع، فيه $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{QR} = \vec{b}$، أعبّر عن كل مما يأتي باستعمال المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

01 $\overrightarrow{SR}$

02 $\overrightarrow{SP}$

03 $\overrightarrow{QP}$

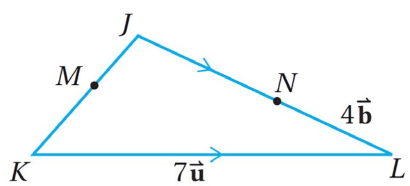
04 $\overrightarrow{RQ}$

05 $\overrightarrow{PR}$

06 $\overrightarrow{QS}$

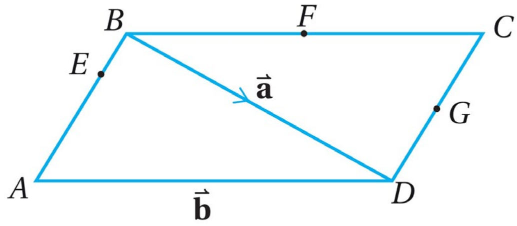
مثال 7

في المثلث JKL المجاور، إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{JK}$ وكانت $JN : NL = 3:2$ وكانت: $\overrightarrow{KL} = 7\vec{u}$ وكانت $\overrightarrow{NL} = 4\vec{b}$، فأكتب $\overrightarrow{JM}$ بدلالة $\vec{u}$ و $\vec{b}$



مثال 8

في متوازي الأضلاع $ABCD$ المجاور، إذا كانت F نقطة منتصف $\overline{BC}$ و G نقطة منتصف $\overline{DC}$ وكانت: $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$ وكانت $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ، وكانت $AE = 3EB$ ، فأكتب كلًا مما يأتي بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$



01 $\overrightarrow{AB}$

02 $\overrightarrow{EB}$

03 $\overrightarrow{EF}$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبريًا

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ متجهين في الفضاء، وكان c عددًا حقيقيًا، فإن:

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3)\rangle$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3)\rangle$$

$$c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3\rangle$$

مثال 9

إذا كان: $\vec{a} = \langle 4, 7, -3\rangle$, $\vec{b} = \langle 9, -2, -5\rangle$

فجد كل مما يأتي:

01 $2\vec{a} + 3\vec{b}$

02 $4\vec{a} - 2\vec{b}$

مثال 10

إذا كان:

$\vec{u} = \langle 4, 5, -3\rangle$, $\vec{v} = \langle 3, 0, -5\rangle$, $\vec{w} = \langle 9, -2, -5\rangle$

فجد كل مما يأتي:

01 $3\vec{v} - 4\vec{u}$

02 $3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w}$

تساوي المتجهات

يتساوى متجهان إذا كان لهما الاتجاه والمقدار نفساهما، عندئذ تكون لهما الصورة الإحداثية نفسها؛ أي أن إحداثياتهما المتناظرة تكون متساوية.

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle , \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ فإن:

$\vec{v} = \vec{w}$ إذا وفقط إذا كان: $v_1 = w_1 , v_2 = w_2 , v_3 = w_3$

مثال 11

إذا كان: $\vec{u} = \langle 2 , 3a - 2 , 9 \rangle , \vec{v} = \langle 4 - b , 10 , c \rangle$

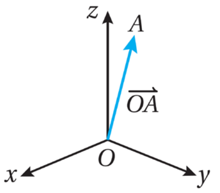
جد قيمة كل من: a و b و c

مثال 12

إذا كان: $\vec{u} = \langle 20, 2p - 5, -12 \rangle , \vec{v} = \langle 3q + 8, 0, 3r \rangle$

جد قيمة كل من: p و q و r

متجها الموقع والإزاحة

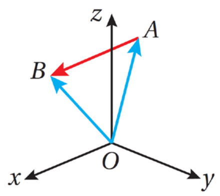


ـ متجه الموقع للنقطة A: متجه يبدأ بنقطة الأصل وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$

ـ يُستعمل الرمز $\overrightarrow{OA}$ للدلالة على متجه الموقع للنقطة A

ـ الصورة الاحداثية لهذا المتجه فهي:

$$\overrightarrow{OA} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle - \langle 0, 0, 0 \rangle = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$



ـ مُتجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$: هو ناتج طرح متجه الموقع للنقطة A من متجه الموقع للنقطة B

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

ـ يُمثل مقدار متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ المسافة بين النقطة A والنقطة B، وهذه المسافة هي قيمة عددية غير متجهة.

مثال 13

إذا كانت: $A(-11, 2, 21), B(3, -5, 7)$، فجد كل مما يأتي:

01 متجه موقع كل من النقطة A والنقطة B.

02 متجه الإزاحة من النقطة A إلى النقطة B.

03 المسافة بين النقطة A والنقطة B.

مثال 14

إذا كان:

$A(-2, 8, 13), B(5, -7, -9), C(0, 1, -14)$

نقاطًا في الفضاء، فجد كلا مما يأتي:

01 متجه موقع كل من النقاط A, B, C .

02 متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة C.

03 المسافة بين النقطة A والنقطة C.

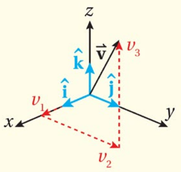
متجهات الوحدة الأساسية

للطالب:

مفهوم أساسي — كتابة المتجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

يُمكِن كتابة المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\,\hat{\mathbf{i}} + v_2\,\hat{\mathbf{j}} + v_3\,\hat{\mathbf{k}}$$



مثال 15

01 أكتب المتجه: $\vec{u} = \langle 5, -3, 6 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

02 إذا كان:

$\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k} \,, \vec{v} = 4\hat{\imath} + 7\hat{k}$

فأكتب المتجه: $2\vec{u} + 3\vec{v}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

مثال 16

أكتب كل من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

01 $\vec{g} = \langle 9 , 0 , -4 \rangle$

02 $\overrightarrow{AB}: A(2, -1, 4) \,, B(7, 6, -2)$

03

$4\vec{m} - 5\vec{f} : \vec{m} = -2\,\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k} \,, \vec{f} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}$

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه

يُمكِن إيجاد متجه وحدة في اتجاه أيِّ متجه، وذلك بقسمة ذلك المتجه على مقداره، فيصبح مقدار المتجه الناتج وحدة واحدة.

مثال 17

إذا كان: $A(3,4,-7), B(-5,16-2)$ ، فأجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$

مثال 18

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

01 $\vec{u}=\langle 4,-3,5\rangle$

02 $\vec{v}=8\hat{\imath}+15\hat{\jmath}-17\hat{k}$

03 $\overrightarrow{AB}: A(-1,4,6)\ , B(3,3,8)$

رموز رياضية

توجد صور مختلفة للتعبير عن المتجه $\vec{\mathbf{a}}$، مثل: $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$، و $a_1\,\hat{\mathbf{i}}+a_2\,\hat{\mathbf{j}}+a_3\,\hat{\mathbf{k}}$، و $\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$.

أتدرب وأحل المسائل

مثال 19

عيّن كل من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

01 $A\ (4, 5, 3)$

02 $B(-2, 3, -5)$

03 $(4, 0, -3)$

مثال 20

جد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطي طرفاها في كل مما يأتي:

01 $(3, -2, 8), (5, 4, 2)$

02 $(-2, 7, 0)\ , (2, -5, 3)$

03 $(12, 8, -5)\ , (-3, 6, 7)$

04 $(-5, -8, 4), (3, 2, -6)$

مثال 21

أمثل كل من المتجهات الآتية بيانيًا في الفضاء.

01 $\vec{v} = \langle -3, -4, 5 \rangle$

02 $\vec{m} = \langle 2, -3, -4 \rangle$

03 $\vec{p} = \langle -3, 5, -2 \rangle$

04 $\vec{e} = -5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

05 $\overrightarrow{AB}: A(41, 1)\ , B(-3, 6, 3)$

06 $\overrightarrow{GH}: G(1, -3, 5), H(0, 4, -2)$

مثال 22

جد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي أعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي:

01 $A(4,6,9)\ ,B(-3,2,5)$

02 $A(-8,5,7), B(6,3,2)$

03 $A(12,-5-4), B(4,1,-1)$

04 $A(24,-8,10), B(10,6,3)$

مثال 23

إذا كان OAB مثلثا، فيه $\overrightarrow{OA}=\vec{a}\ ,\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ والنقطة C هي منتصف $\overline{AB}$، فأكتب المتجه $\overrightarrow{OC}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

مثال 24

إذا كان:

$\vec{e}=\langle -3,9,-4\rangle\ ,\vec{f}=5\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+7\hat{k}$

$\vec{g}=\langle -1,8,-5\rangle$

فجد كل مما يأتي:

01 $3\vec{e}+4\vec{f}$

02 $\vec{e}+\vec{f}-3\vec{g}$

03 $4\vec{e}-2\vec{f}+3\vec{g}$

04 $2\vec{e}+7\vec{f}-2\vec{g}$

مثال 25

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

01 $-4\hat{i}+3\hat{j}$

02 $143\hat{i}-24\hat{j}$

03 $-72\hat{i}+33\hat{j}+56\hat{k}$

04 $\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$

05 $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

06 $\vec{n}=\langle -3,0,3 \rangle$

مثال 26

إذا كان:

$\vec{a} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k}\ ,\ \vec{b} = 7\hat{\imath} + 39\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

وكان: $3\vec{a} + c\,\vec{b} = -23\hat{\imath} - 66\hat{\jmath} + 40\hat{k}$ فجد قيمة c

مثال 27

إذا كان: $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix}$ وكان:

$k\vec{s} - 4\vec{t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$ ، فجد قيمة كل من k, w, v

مثال 28

إذا كان:

$\vec{m} = \langle 4, 1, -2\rangle\ ,\vec{n} = \langle 6, 2, -3\rangle, \vec{p} = \langle 2, a, -1\rangle$

وكان $5\vec{m} + 2\vec{p} = 4\vec{n}$ ، فما قيمة الثابت a؟

مثال 29

إذا كان: $\vec{v} = \langle u-3\ , u+1\ , u-2\rangle$

وكان: $|\vec{v}| = 17$ ، فما قيمة u؟

مثال 30

إذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما على الترتيب $\vec{h} = \langle c-1, -4, c+2 \rangle, \vec{g} = \langle -2, c+1, -8 \rangle$ على الترتيب، فجد قيمة c، علمًا بأن: $|\overrightarrow{GH}| = 19$ وأن: $c > 0$

مهارات التفكير العليا

مثال 31

أكتشف الخطأ: قالت حنان: إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإنّ النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج هذه الكرة . في حين قالت هديل: النقطة B تقع داخل هذه الكرة . أيُّ القولين صحيح، مُبرِّرًا إجابتي؟

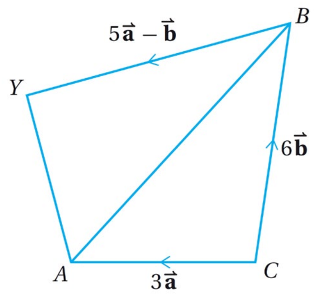
مثال 32

إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأبيّن أن النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $J(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة، مبررًا إجابتي

مثال 33

في الشكل الأتي، إذا كان:

$\overrightarrow{CA} = 3\vec{a}, \overrightarrow{BY} = 5\vec{a}, \overrightarrow{CB} = 6\vec{b}$، وكانت X تقع على $\overline{AB}$ ، حيث $AX : XB = 1 : 2$، فاثبت أن: $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$



مثال 34

تمثل النقاط: $A(2,3,-1), B(2,3,5), C(8,-3,5)$ ثلاثة رؤوس من مكعب خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات: xy , xz , yz. أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة مبررًا إجابتي.

مثال 35

إذا كانت متجهات الموقع للنقاط: M, L, N هي:

$$\vec{m} = -3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + \hat{k} \quad , \quad \vec{l} = 4\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

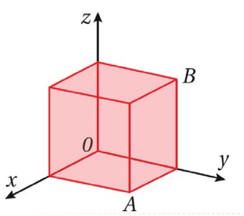
$\vec{n} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 9\hat{k}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

01 **أثبت أن المثلث LMN قائم الزاوية.**

02 **جد مساحة المثلث LMN**

مثال 36

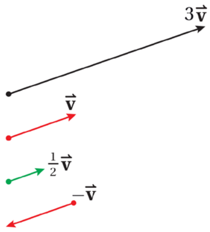
يُمثِّل الشكل المجاور مُكعَّبًا طول ضلعه 5 cm، ما إحداثيات كلٍّ من الرأس A، والرأس B؟



الدرس الثاني: المستقيمات في الفضاء

توازي المتجهات

المتجهان المتوازيـان هما متجهان لهما الاتجاه نفســه، أو عكسه، وليس شرطًا أنْ يكون لهما المقدار نفسه، وهذا يعني أنَّه يُمكِن كتابة كلٍّ منهما في صورة المتجه الآخر مضروبًا في عدد حقيقي.



مفهوم أساسي توازي المتجهات

إذا كان: $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle, \vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$، فإنَّ:

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ إذا وفقط إذا وُجِد عدد حقيقي k، حيث: $k \neq 0$، بحيث يكون:

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = k\langle u_1, u_2, u_3\rangle$$

مثال 1

إذا كان:

$A(-2,5,-3), B(1,-3,2), C(3,-14,8)$

$D(-3,2,-2)$، **فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا؟**

01 $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}$

02 $\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{BD}$

مثال 2

إذا كان:

$G(7,5,-11), H(4,4,-4), K(4,5,3)$

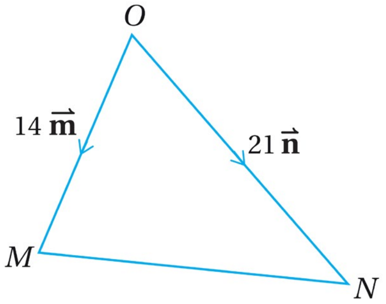
$L(7,7,3)$، فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا؟

01 $\overrightarrow{GH}\,, \overrightarrow{KL}$

02 $\overrightarrow{GL}\,, \overrightarrow{HK}$

مثال 3

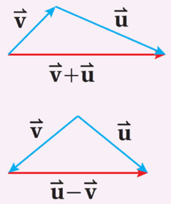
في المثلث OMN المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{OM} = 14\,\vec{m}$, $\overrightarrow{ON} = 21\,\vec{n}$، وكانت النقطة P تقع على $\overline{OM}$، حيث: $OP : PM = 2 : 5$، والنقطة Q تقع على $\overline{ON}$، حيث: $ON = \frac{7}{2}\,OQ$، فأُثبِت أنَّ $\overline{PQ}$ يوازي $\overline{MN}$.



أتعلّم

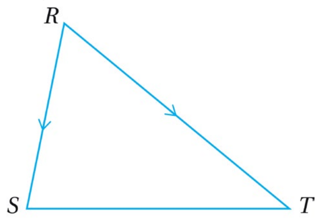
لإثبات توازي قطعتين مستقيمتين بوجه عام، يكفي إثبات توازي متجهين يقعان على هاتين القطعتين المستقيمتين.

أتذكّر



مثال 4

في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\overline{RS}=4\vec{a}, \overline{RT}=6\vec{b}$، والنقطة U منتصف $\overline{RS}$، والنقطة V منتصف $\overline{RT}$، فأُثبِت أنَّ $\overrightarrow{ST}$ يوازي $\overrightarrow{UV}$.

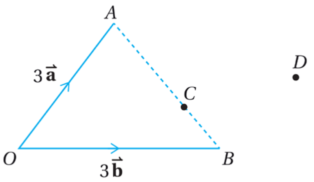


مُلاحظات:

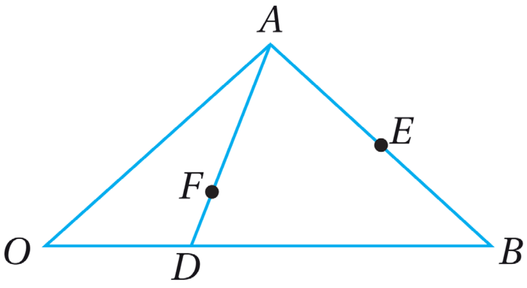
لإثبات أنَّ ثلاث نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة، يكفي إثبات وجود متجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة، وتكون النقاط الثلاث هي نقاط بداية أو نهاية لهذين المتجهين.

مثال 5

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB،
والنقطتان: C، وD.
إذا كان: $\overrightarrow{OA}=3\vec{a}, \overrightarrow{OB}=3\vec{b}$، وكانت
النقطة C تقع على $\overline{AB}$، حيث: $AC=2CB$،
وكان: $\overrightarrow{BD}=2\vec{a}+\vec{b}$، فأُثبِت أنَّ O، وC، وD تقع على استقامة واحدة.



مثال 6



يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB.

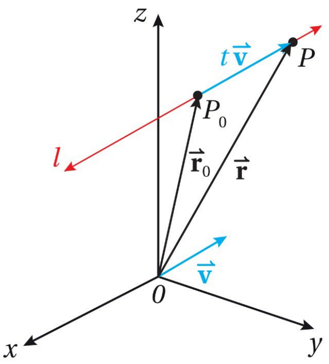
إذا كان: $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$، وكانـــت النقطة D تقع على $\overline{OB}$، والنقطة E منتصف $\overline{AB}$، والنقطة F تقع على $\overline{AD}$، حيث: $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})$، فأُثبِت أنَّ O، وF، وE تقع على استقامة واحدة.

المعادلة المتجهة للمستقيم

أتعلَّم

لا يُمكِنني استعمال الصيغة: $y = mx + b$ لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.

تعلَّمْتُ سابقًا استعمال الميل ومقطع المحور y لكتابة معادلة مستقيم في المستوى الإحداثي. والآن سأتعلَّم كيف أستعمل المتجهات لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.



في الشكل المجاور، يمرُّ المستقيم l بالنقطة المعلومة P_0، موازيًا المتجه $\vec{\mathbf{v}}$، ولتكن النقطة P أيَّ نقطة على المستقيم l. ومن ثَمَّ، فإنَّ المتجه $\overrightarrow{P_0P}$ يوازي المتجه $\vec{\mathbf{v}}$؛ لذا يُمكِن كتابته في صورة: $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{\mathbf{v}}$، حيث t عدد حقيقي. ووَفقًا لقاعدة المثلث لجمع المتجهات، فإنَّ متجه الموقع للنقطة P يساوي مجموع متجه الموقع للنقطة P_0 والمتجه $\overrightarrow{P_0P}$؛ أيْ إنَّ:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

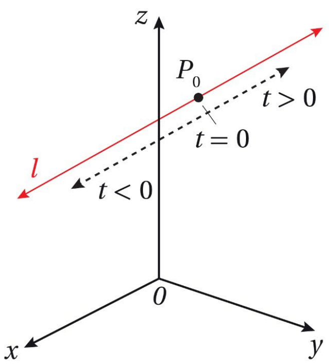
لغة الرياضيات

يُسمّى المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ اتجاه المستقيم l.

وإذا كان متجه الموقع للنقطة P هو $\vec{\mathbf{r}}$، ومتجه الموقع للنقطة P_0 هو $\vec{\mathbf{r}}_0$، فإنَّ:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{v}}$$

يُطلَق على هذه الصيغة اسم **المعادلة المتجهة للمستقيم** (vector equation of a line).



يُسمّى المُتغيِّر t في المعادلة السابقة **المُتغيِّر الوسيط** (parameter)، وتُحدِّد كل قيمة من قِيَم t نقطة وحيدة على المستقيم. فمثلًا، $t = 0$ تُحدِّد النقطة P_0، وقِيَم t الموجبة تُحدِّد النقاط الواقعة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ بَدْءًا بـ P_0، وقِيَم t السالبة تُحدِّد النقاط الواقعة عكس اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ بَدْءًا بـ P_0.

أتعلَّم

إذا كان $\vec{\mathbf{v}}$ اتجاهًا للمستقيم l، فإنَّ $k\vec{\mathbf{v}}$، حيث: $k \neq 0$، هو أيضًا اتجاه للمستقيم l.

مفهوم أساسي

المعادلة المتجهة للمستقيم

المعادلة المتجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه $\vec{\mathbf{v}}$، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{\mathbf{r}}_0$، هي:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{v}}$$

أتعلَّم

المعادلة المتجهة للمستقيم لها عِدَّة صور مُتكافِئة تختلف باختلاف النقطة P_0.

مثال 7

جد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه:

$\overrightarrow{w} = \langle -4, 2, 7 \rangle$ ، ويمر بالنقطة $U(2, -3, 5)$

مثال 8

جد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه:

$\overrightarrow{v} = \langle 1, -4, -5 \rangle$ ، ويمر بالنقطة $U(0, -6, 9)$

أتذكَّر

تُحدِّد أيُّ نقطتين على المستقيم في المستوى الإحداثي ميل هذا المستقيم. أمّا في الفضاء فإنَّ أيَّ نقطتين على المستقيم تُحدِّدان اتجاهه.

أتعلَّم

يُفضَّل تبسيط الصورة الإحداثية للمتجه الناتج بالقسمة على العامل المشترك الأكبر لإحداثياته؛ لأنَّ المُهِمَّ هو الاتجاه، وليس المقدار (أو الطول).

لغة الرياضيات

يوازي المستقيم l المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ إذا كان $\vec{\mathbf{v}}$ اتجاهًا للمستقيم l.

يُمكِن بسهولة تحديد متجه موازٍ لمستقيم يمرُّ بنقطتين معلومتين؛ وهو المتجه الذي يقع على المستقيم، وطرفاه هاتان النقطتان.

إذا عُلِمت نقطتان يمرُّ بهما المستقيم، فيُمكِن عندئذٍ كتابة معادلته المتجهة باتِّباع الخطوتين الآتيتين:

- إيجاد الصورة الإحداثية للمتجه الموازي، الذي طرفاه النقطتان المعلومتان، بصرف النظر عن النقطة التي يبدأ منها المتجه.

- تعويض متجه الموقع لإحدى النقطتين والمتجه الموازي للمستقيم في صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم.

مثال 9

جد معادلة متجهة للمستقيم l المار بالنقطتين:

$Q(19, 5, -10), P(5, -2, 18)$

ملاحظات مهمة:

ـ يُفضّل تبسيط الصورة الإحداثية للمتجه الناتج بالقسمة على العامل المشترك الأكبر لإحداثياته؛ لأنّ المُهمَّ هو الاتجاه، وليس المقدار أو (الطول).

ـ المعادلة المتجهة للمستقيم لها عدّة صور مُتكافئة، تختلف باختلاف النقطة التي يُعوَّض متجه موقعها في المعادلة. يُمكِن أيضًا تعويض متجه موقع النقطة Q، أو أيِّ نقطة أخرى على المستقيم، مثل نقطة منتصف القطعة $\overline{PQ}$، بدلًا من النقطة P.

مثال 10

جد معادلة متجهة للمستقيم l المار بالنقطتين:

$N(2, -4, 3), M(3, 7, -9)$

يُمكِن استعمال المعادلة المتجهة للمستقيم في التحقُّق من وقوع نقطة معلومة عليه أم لا، وإيجاد نقطة تقع عليه، علِم أحد إحداثياتها.

مثال 11

تمثل: $\vec{r} = \langle -2, 9, 1\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l:

01 أبيِن أن النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l

02 جد نقطة على المستقيم، إحداثي z لها هو 25

ملاحظات مهمة على المثال السابق:

ـ كل قيمة من قِيَم t تحدِّد نقطة وحيدة على المستقيم، وكل نقطة على المستقيم تتحدَّد بقيمة مُعيَّنة للمُتغيِّر t

ـ إذا نتجت من حلِّ المعادلات في هذا المثال قِيَمٌ مختلفة للمُتغيِّر t فإنَّ النقطة لا تقع على المستقيم .

ـ في الفرع الثاني من مثال 11:

القيمة $t = 12$ هي قيمة المُتغيِّر t التي ينتج من تعويضها في معادلة المستقيم نقطةُ الإحداثي z لها هو 25 .

مثال 12

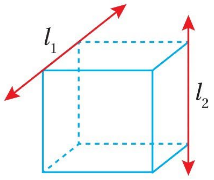
تمثل: $\vec{r} = 11\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 6\hat{k} + t(7\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k})$
معادلة متجهة للمستقيم l:

01 أبيّن أن النقطة التي متجه الموقع لها هو:
$(39\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم l.

02 جد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة: $t = -3$

03 إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ تقع على المستقيم l، فما قيمة v؟

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة



يكون المستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين، أو متقاطعين. أمّا في الفضاء فتوجد حالة ثالثة، هي أنْ يكون المستقيمان **متخالفين** (skew)؛ أيْ غير متوازيين، وغير متقاطعين، مثل المستقيمين: l_1، و l_2 في الشكل المجاور.

إذا عُلِمت معادلتا مستقيمين في الفضاء، فيُمكِن الجزم بتوازيهما إذا كان اتجاه كلٍّ منهما موازيًا للآخر؛ أيْ إنَّ أحدهما ينتج من ضرب الآخر في عدد حقيقي.

أتذكَّر

يتوازى المتجهان: $\vec{\mathbf{u}}$، و $\vec{\mathbf{v}}$ إذا كان $\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{v}}$، حيث k عدد حقيقي، حيث: $k \neq 0$، ويُرمَز إلى هذا التوازي بالرمز: $\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$.

مفهوم أساسي — المستقيمات المتوازية

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{c}} + u\vec{\mathbf{d}}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فإنَّ: $l_1 \parallel l_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{d}}$.

يُمكِن الحكم على تقاطع المستقيمين: $l_1 : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$، و $l_2 : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{c}} + u\vec{\mathbf{d}}$ بمساواة متجهي الموقع $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتيهما، وحلِّ المعادلات الثلاث الناتجة لإيجاد قيمة كلٍّ من المُتغيِّر t والمُتغيِّر u. فإذا تحقَّقت المعادلات الثلاث لقيمتي هذين المُتغيِّرين، كان المستقيمان متقاطعين. وإذا كان المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين، فإنَّهما يكونان متخالفين.

إرشاد

إذا جاء في المسألة أكثر من مستقيم، فأستعمل رموزًا مختلفة للمُتغيِّر الوسيط.

ملاحظة:

يُمكِن النظر إلى المعادلة: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{d}$ بوصفها حركة جسم في مسار مستقيم، بحيث تُحدِّد المعادلة موقعه في اللحظة t ويُمكِن النظر إلى أيِّ مستقيمين في الفضاء بوصفهما مساري جسمين، يتحرَّك كلٌّ منهما في مسار مستقيم، وزمن خاص به؛ لذا، فإنَّ تقاطع هذين المستقيمين لا يعني بالضرورة اصطدام الجسمين أحدهما بالآخر.

مثال 13

إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, -3, -6\rangle + t\langle 2, -4, 3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{r} = \langle 4, 7, 0\rangle + u\langle 1, 2, 3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأُحدِّد إنْ كان l_1 و l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

ملاحظات على المثال السابق:

- بالرغم من أنَّ قيمتي المُتغيِّرين t, u الناتجتين في الخطوة السابقة، تحقّقان المعادلة الأولى والمعادلة الثانية، فإنه يجب تعويضهما في المعادلة الثالثة للتأكُّد أنهما تحقّقانها أيضًا. وإذا لم تتحقّق المعادلة الثالثة، فإنَّ المستقيمين يكونان متخالفين.

- يُمكِن إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين باستعمال معادلة l_2، والقيمة $u = -3$

مثال 14

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأُحدِّد إذا كان المستقيمان: l_1، و l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

مثال 15

أقلعت طائرة من موقعٍ إحداثياته $(13, 7, 0)$ وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقعٍ إحداثياته $(-2, 5, 0)$ وبعد التحليق مدّة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته $(19, 10, 20)$ وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته $(-11, 15, 20)$. هل خطّا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

مثال 16

أقلعت طائرة من موقعٍ إحداثياته $(0, 7, 0)$ وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقعٍ إحداثياته $(-2, 0, 0)$ وبعد التحليق مدَّة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته $(8, 15, 16)$ وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته $(22, 24, 48)$. هل خطّا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

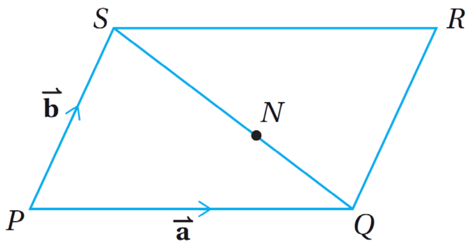
أُحدِّد إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\langle 8, 12, 24\rangle, \langle 15, 10, -20\rangle$

2) $\langle 27, -48, -36\rangle, \langle 9, -16, -12\rangle$

3) $\langle -6, -4, 10\rangle, \langle -3, -1, 13\rangle$

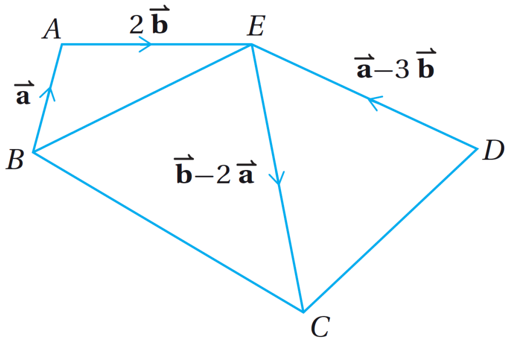
4) $\langle 12, -8, 32\rangle, \langle 21, -14, 56\rangle$



يُمثِّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $PQRS$، الذي تقع فيه النقطة N على $\overline{SQ}$، حيث: $SN : NQ = 3 : 2$، و $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}, \overrightarrow{PS} = \vec{b}$:

5 أكتب $\overrightarrow{SQ}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

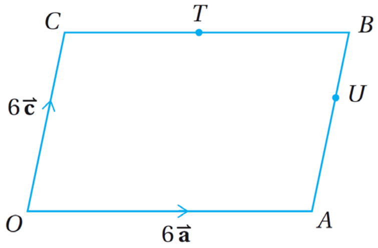
6 أكتب $\overrightarrow{NR}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.



7 مُعتمِدًا المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أُثبِت أنَّ $BEDC$ متوازي أضلاع.

إرشاد: في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متوازيان، ولهما الطول نفسه.

8 في متوازي الأضلاع $OABC$ المجاور، $\overrightarrow{OA} = 6\,\vec{\mathbf{a}},\ \overrightarrow{OC} = 6\,\vec{\mathbf{c}}$، والنقطة T هي منتصف الضلع $\overline{CB}$، والنقطة U تقسم $\overline{AB}$ بنسبة $1:2$. إذا مُدَّ الضلع $\overline{OA}$ على استقامته إلى النقطة X، حيث: $OA = AX$، فأثبِت أنَّ T، وU، وX تقع على استقامة واحدة.



أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{\mathbf{a}}$، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{\mathbf{b}}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

9 $\vec{\mathbf{a}} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{b}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$

10 $\vec{\mathbf{a}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{b}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{k}}$

11 $\vec{\mathbf{a}} = \langle 4, 3\rangle,\ \vec{\mathbf{b}} = \langle 9, -2\rangle$

12 $\vec{\mathbf{a}} = \langle 0, -1, 3\rangle,\ \vec{\mathbf{b}} = \langle 10, 3, -6\rangle$

إرشاد: تظلُّ المعادلة المتجهة للمستقيم صحيحة في المستوى الإحداثي.

أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

13 $(10, 3, -6), (0, -1, 3)$

14 $(11, -6, 9), (1, 4, 29)$

15 $(-30, -6, 30), (-26, -12, 23)$

16 $(-2, 9, 1), (10, 5, -7)$

17 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

$\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 2, -1 \rangle + t\langle 1, 2, -1 \rangle$، و $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, 4, -7 \rangle + u\langle -1, 3, 1 \rangle$.

يمرُّ المســـتقيم l_1 بالنقطتين: E، وF، ويمرُّ المســـتقيم l_2 بالنقطتين: G، وH. أُحدِّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

18) $E(3, -5, -7), F(-11, 9, 14), G(8, -1, -8), H(2, 5, 1)$

19) $E(3, 7, -9), F(2, -4, 3), G(24, 14, -29), H(3, -21, 20)$

يمرُّ المستقيم $\boldsymbol{l}$ بالنقطتين: $\boldsymbol{A(-2, 9, 1)}$، و $\boldsymbol{B(10, 5, -7)}$:

20 أكتب معادلة متجهة للمستقيم l.

21 أُبيِّن أنَّ النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l.

22 أجد قيمة a إذا كانت النقطة $(1, a, -1)$ تقع على المستقيم l.

23 أجد قيمة كلٍّ من b، و c إذا كانت النقطة $(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l.

24 أجد نقطة تقع على المستقيم l، وتقع أيضًا في المستوى xz.

25 إذا كان: $\vec{\mathbf{n}} = \langle -5, 4, a \rangle$, $\vec{\mathbf{m}} = \langle 1, -2, 3 \rangle$، وكان المتجـــه: $3\vec{\mathbf{n}} + b\vec{\mathbf{m}}$ يـــوازي المتجه: $\langle 3, -3, 5 \rangle$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

26 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = a\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$، فأجـــد قيمـــة كلٍّ من: a، وb، وc، علمًا بأنَّ اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ في اتجاه محور y الموجب، و $|\vec{\mathbf{v}}| = 34$.

متجهات الموقع للنقاط: A، وB، و C الواقعة على مستقيم واحد هي:

$\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} + p\,\hat{\mathbf{j}} + q\,\hat{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{b}} = -4\,\hat{\mathbf{i}} + 13\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{c}} = 14\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\,\hat{\mathbf{k}}$ على الترتيب:

27 أجد قيمة p.

28 أجد قيمة q.

29 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المارِّ بالنقطتين: A، و B مع المستوى yz.

30 أجد طول $\overline{AC}$ في صورة: $a\sqrt{14}$، حيث a عدد صحيح.

---

31 $A(1, 2)$، و $B(2, 3)$ نقطتان في المســـتوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم المارِّ بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة متجهة لهذا المستقيم، مُقارِنًا بين المعادلتين.

إذا كان المستقيم l_1 يمرُّ بالنقطة $A(-3, -1, 12)$، والنقطة $B(-2, 0, 11)$، وكان المستقيم l_2 يوازي المستقيم l_1، ويمرُّ بالنقطة $C(11, 9, 12)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

32 أجد معادلة متجهة للمستقيم l_1.

33 أجد معادلة متجهة للمستقيم l_2.

إذا كانت: $A(-1, -2, 1)$، و $B(-3, 4, -5)$، و $C(0, -2, 4)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد إحداثيات النقطة M التي هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

35 إذا وقعت النقطة N على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$، وكان: $|\overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{BN}|$، فأجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين M و N.

36 يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $Q(-2, -3, 3)$، و $P(-5, 2, 4)$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $R(0, -8, -1)$، و $S(12, -23, a)$. إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فما قيمة a؟ وما إحداثيات نقطة تقاطعهما؟

---

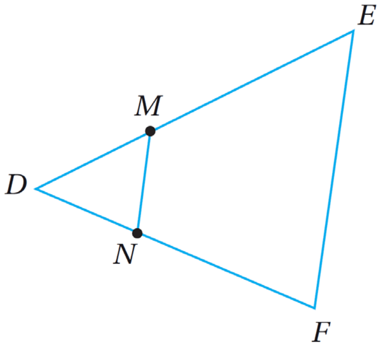
37 أقمار صناعية: مَرَّ القمر الصناعي S_1 بموقعين، هما: $A(30, -75, 90)$، و $B(100, 65, 220)$، ومَرَّ القمر الصناعي S_2 بموقعين، هما: $C(-20, 45, 200)$، و $D(120, 85, 160)$.
أُحدِّد العلاقة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ من معادلتيهما.

38

أُرسِلت إشارة لاسلكية من موقعٍ إحداثياته: $(-1, 4, 5)$ إلى موقعٍ إحداثياته: $(-11, 9, 15)$. وفي الوقت نفسه، أُرسِلت إشارة من موقعٍ إحداثياته: $(-5, 9, 3)$ إلى موقعٍ إحداثياته: $(2, -5, 17)$. إذا علمْتُ أنَّ الإشارة تسير في خط مستقيم، فهل يتقاطع مسارا الإشارتين؟

مهارات التفكير العليا

39 تحدٍّ: يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{\mathbf{q}} = \langle -6, 14, -19 \rangle$، ويمرُّ أيضًا بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{\mathbf{s}} = \langle -4, 6, -3 \rangle$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$، ويوازي المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 0, -6, 1 \rangle + t\langle 4,7,4 \rangle$. إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U، فأُثبِت أنَّ المثلث STU متطابق الضلعين.



تبرير: في الشـــكل المجاور، $DE = 12\vec{a}$، و$DF = 8\vec{b}$، والنقطة M تقسم DE بنسبة $2:1$، والنقطة N تقسم $\overline{DF}$ بنسبة $2:1$

40 أُثبِت أنَّ: $FEMN$ شبه مُنحرِف.

41 إذا كانت مســـاحة المثلث DEF تســـاوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة $FEMN$.

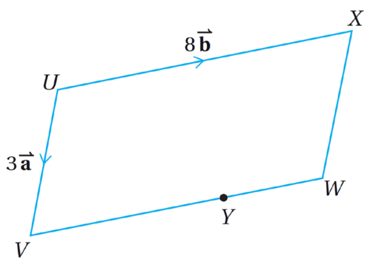
---

42 تبرير: تقع النقطة C على المستقيم الذي يحوي النقطتين: $A(13, -10, 15)$، و $B(22, -22, 9)$. إذا كان بُعْد C عن B مثلي بُعْد C عن A، فأجد جميع إحداثيات النقطة C المُمكِنة، مُبرِّرًا إجابتي.

43 تحدٍّ: أجد جميع النقاط على المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -2, -6\rangle + t\langle 1, 2, 3\rangle$ التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل.

---

44 تحدٍّ: يُمثِّل الشـكل المجاور متوازي الأضلاع $UVWX$. إذا كان: $\overrightarrow{UX} = 8\vec{\mathbf{b}}$، و $\overrightarrow{UV} = 3\vec{\mathbf{a}}$، وكانـت النقطـة Y تقـع بين V و W، حيث: $VY = 3YW$، و Z هي نقطة، حيث: $\overrightarrow{XW} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XZ}$، فأُثبِت أنَّ U، و Y، و Z تقع على استقامة واحدة.



الدرس الثالث: الضرب القياسي

تذكر:

لأي ثلاثة متجهات: $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$، وأي عدد حقيقي c فإن:

$\rightarrow \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{v}$

$\rightarrow \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$\rightarrow c(\vec{u}.\vec{v}) = (c\vec{u}).\vec{v}$

مفهوم أساسي:

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle , \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ فإن:

$$\vec{v}.\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

ـ ناتج الضرب القياسي لمتجهين هو عدد وليس متجهًا.

مثال 1

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

01 $\vec{v} = 5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 8\hat{k}, \vec{w} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$

02 $\vec{m} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - \hat{k} , \vec{n} = -12\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 8\hat{k}$

03 $\vec{a} = \langle 4, -6, 5\rangle , \vec{b} = \langle 3, 7, 2\rangle$

04 $\vec{m} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - \hat{k} , \vec{n} = -12\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 8\hat{k}$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

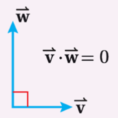
للطالب:

مفهوم أساسي:

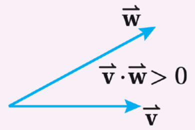
إذا كان $\vec{w}, \vec{v}$ متجهين غير صفريين، فإنه يمكن إيجاد قياس الزاوية بينهما θ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$$

• إذا كان: $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$، فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ قائمة؛ أيْ إنَّ هذين المتجهين مُتعامِدان.

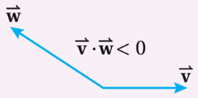


• إذا كان: $\vec{v}\cdot\vec{w} > 0$، فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ حادَّة.



أستنتج ما يأتي من العلاقة المجاورة:

• إذا كان: $\vec{v}\cdot\vec{w} < 0$، فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ مُنفرِجة.



مثال 2

إذا كان: $\vec{v} = \langle 5, -2, 1\rangle$ وكان: $\vec{w} = \langle -3, 1, 4\rangle$ فجد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ إلى أقرب عشر درجة.

مثال 3

جد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{u}$ والمتجه $\vec{w}$ إلى أقرب عشر درجة في كل مما يأتي:

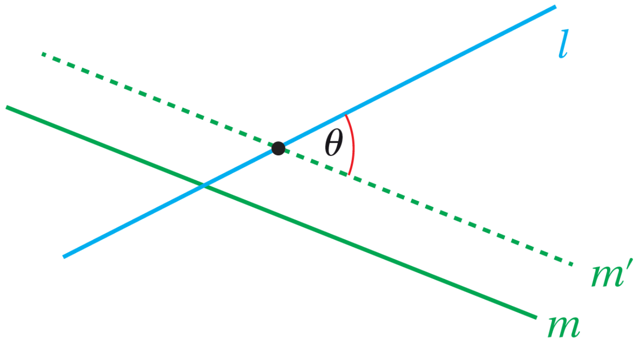
01 $\vec{u} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 4\hat{k}\ ,\vec{w} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

02 $\vec{u} = \langle 2, -10, 6\rangle\ ,\vec{w} = \langle -3, 15, -9\rangle$

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

تعلَّمْتُ في الدرس السابق أنَّ اتجاه المستقيم في الفضاء يُحدِّده أيُّ متجه يوازيه؛ لذا يُمكِن إيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين في الفضاء عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاهيهما باستعمال الضرب القياسي للمتجهات.

وكذلك يُمكِن إيجاد الزاوية بين المستقيمين في الفضاء حتى لو كانا متخالفين. فالمستقيم l والمستقيم m في الشكل الآتي متخالفان، ولكنْ يُمكِن إيجاد الزاوية بينهما عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاه المستقيم l واتجاه المستقيم m' الذي يُعَدُّ إزاحة للمستقيم .



إذا تقاطع مستقيمان غير مُتعامِدين، فإنَّه ينتج من تقاطعهما زاويتان حادَّتان ومُتقابِلتان بالرأس، وزاويتان مُنفرِجتان ومُتقابِلتان بالرأس. ويُمكِن إيجاد قياس الزاوية الحادَّة بينهما بطرح الزاوية المُنفرِجة من $180°$

مثال 3

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **معادلة متجهة للمستقيم** l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ **معادلة متجهة للمستقيم** l_2 **فجد**

قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 **والمستقيم** l_2 **إلى أقرب عُشر درجة.**

مثال 4

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 فجد

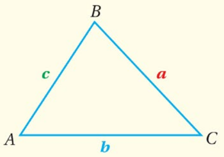
قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب عُشر درجة.

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

مراجعة المفهوم

إيجاد مساحة المثلث باستعمال قانون الجيب

مساحة المثلث ABC تساوي نصف ناتج ضرب طولي أيِّ ضلعين فيه مضروبًا في جيب الزاوية المحصورة بينهما:



$$\text{Area} = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad \text{Area} = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad \text{Area} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

للطالب

مثال 5

جد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$A(5,6,-2)$, $B(2,-2,1)$, $C(2,-3,6)$

مثال 6

جد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$E(2,1,-1)$, $F(5,1,7)$, $G(6,-3,1)$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجة

البُعْد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، التي تمثّل أقصر مسافة بين النقطة والمستقيم.

للطالب:

مثال 7

إذا كانت:

$$\vec{r} = 28\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 4\hat{k} + t(8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 6\hat{k})$$

معادلة متجهة للمستقيم l والنقطة $P(3, -4, 2)$ غير واقعة على المستقيم l فأجيب عن السؤالين الآتيين:

01 حدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

02 جد البعد بين النقطة P والمستقيم l.

مثال 8

إذا كانت:

$$\vec{r} = 16\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} - 3\hat{k} + t(5\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 3\hat{k})$$

معادلة متجهة للمستقيم l والنقطة $P\left(2, 0, \frac{10}{3}\right)$ غير واقعة على المستقيم l فأجيب عن السؤالين الآتيين:

01 حدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

02 جد البعد بين النقطة P والمستقيم l.

مثال 9

يظهر في الشكل المجاور الهرم $ABCDE$ الذي قاعدته المربع $ABCD$، وإحداثيات رؤوسه هي:

$A(1,1,-1), B(9,-1,-3), C(9,-7,3)$

$D(1,-5,5), E(8,3,7)$، ومركزه النقطة M:

01 جد $m\angle AEC$ إلى أقرب عُشر درجة.

02 أبيّن أن: $m\angle AME = 90°$

03 جد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبين في المثال السابق.

04 جد حجم الهرم.

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $\vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$
2. $\vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{v} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$
3. $\vec{u} = \langle -5, 9, 17 \rangle, \vec{v} = \langle 4, 6, -2 \rangle$
4. $\vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle, \vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كلٍّ ممّا يأتي:

5. $\vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$
6. $\vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle, \vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$

7 إذا كانت $A(3, 5, -4)$، و $B(7, 4, -3)$، و O نقطة الأصل، فأجد $m\angle OAB$ إلى أقرب درجة.

8 يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $(-3, 5, 7)$، و $(2, -1, 4)$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $(1, 2, -1)$، و $(6, -5, 3)$.
أجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 إلى أقرب عُشر درجة.

9 إذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1, 4, -5\rangle + \lambda\langle -6, q+5, 3\rangle$، والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1, 4, -5\rangle + \mu\langle 5, q-6, -4\rangle$ مُتعامِدين، فما القِيَم المُمكِنة للثابت q؟

إذا كانــت: $\vec{\mathbf{r}} = 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}} + t(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ معادلة متجهة للمســتقيم l، والنقطة $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أُحدِّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l.

11 أجد البُعْد بين النقطة P والمستقيم l.

12 أجد مساحة المثلث ABC، حيث: $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 9, 1 \rangle$، و $\overrightarrow{AC} = \langle 9, 1, 4 \rangle$.

13 أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3, 1), B(2, 7, -3), C(4, -5, 2)$.

14 حــزام ناقل: يُمثِّل المتجــه: $\vec{F} = 5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ القوّة التي يُولِّدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$. أجد مقدار الشــغل الذي تبذله القوّة F، علمًا بأنّ القوّة بالنيوتن N، والمسافة بالمتــر m، ومقدار الشــغل (W) المبذول بوحدة الجول (J) يســاوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوّة في متجه الإزاحة؛ أيْ: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

15 إذا كانت النقطة $R(27, -17, -1)$، والنقطة $S(11, -9, 11)$ تقعان على المستقيم l، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l، حيث $\overline{OQ}$ عمودي على l، فأجد متجه الموقع للنقطة Q.

إذا كانت متجهات مواقع النقاط: A، وB، وD هي: $\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 22 \end{pmatrix}$، و $\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$، و $\begin{pmatrix} 2 \\ -29 \\ 7 \end{pmatrix}$ على الترتيب، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

16 أُثبِت أنَّ: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

17 أجد متجه موقع النقطة C إذا كان $ABCD$ مستطيلًا.

18 أجد مساحة المستطيل $ABCD$.

19 أجد متجه موقع مركز المستطيل $ABCD$.

تُمثِّل: $\vec{r} = \langle -5, 7, 1\rangle + t\langle 3, 1, 4\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وتُمثِّل: $\vec{r} = \langle 2, 8, -1\rangle + u\langle 2, 0, -3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، وتُمثِّل: $\vec{r} = \langle 3, 19, 10\rangle + v\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3.

إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T، وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3، حيث: $\overline{TF} \perp l_3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

20 أجد إحداثيات النقطة F.

21 أجد البُعْد بين النقطة T والمستقيم l_3.

إذا كانت: $\vec{r} = \langle 5, 3, 0\rangle + \lambda\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت $A(3, -2, 1)$، و $B(5, 3, 0)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

22 أجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم l.

23 تقع النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$، حيث: $AB = AC$. أجد إحداثيات النقطة C.

تقع النقطة $A(-7, -4, 9)$ والنقطة $B(8, 5, 3)$ على المســـتقيم l_1، وتقع النقطة $C(6, 11, 7)$ على المســـتقيم l_2 الذي معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 6, 11, 7\rangle + t\langle -1, 3, 2\rangle$:

24 أُبيِّن أنَّ النقطة B تقع على المستقيم l_2.

25 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدان.

26 أجد $m\angle ABC$.

27 أجد مساحة المثلث ABC.

$ABCD$ هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي: $A(4, 3, -1), B(-4, 5, 2), C(6, -1, 0), D(10, 11, 19)$،
فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

28 أجد مساحة المثلث ABC في صورة: $a\sqrt{6}$.

29 أُثبِت أنَّ: $m\angle AED = 90°$، حيث $E(1, 2, 1)$.

30 إذا علمْتُ أنَّ النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC، فأجد حجم الهرم $ABCD$.

إذا كانت $A(3, 1, -6)$، و $B(5, -2, 0)$، و $C(8, -4, -6)$، فأُجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعًا:

31 أُبيِّن أنَّ: $\overrightarrow{AC} = n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$، حيث n عدد صحيح.

32 أُبيِّن أنَّ قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$.

33 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

34 إذا كانت $D(6, -1, p)$، وعُلِم أنَّ $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان، فما قيمة p؟

35 أُبيِّن أنَّ الشكل $ABCD$ مُعيَّن، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

36

أُطلِق صاروخ من النقطة $(1, 2, 1)$، ثم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(9, 13, 21)$. وفي الوقت نفسه، أُطلِق صاروخ آخر من النقطة $(4, -3, 2)$، ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(14, 1, 18)$. ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين؟

مهارات التفكير العليا

37 تبرير: إذا كانت $A(3, -2, 4)$، و $B(1, -5, 9)$، و $C(-4,5, -1)$، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المارّ بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فما إحداثيات النقطة D؟ أُبرِّر إجابتي.

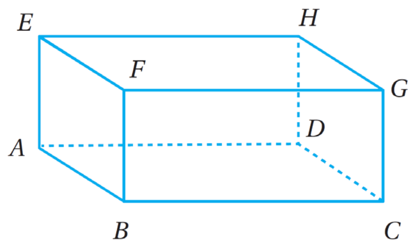
تحدٍّ: إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 31 \\ -26 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1، حيث: $t = 3$، والنقطة R تقع على المستقيم l_2، حيث: $u > 3$، و $PQ = PR$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

38 إذا كان $m\angle RPQ = \theta$، فأُبيِّن أنَّ: $\cos\theta = -\frac{3}{94}$.

39 أُبيِّن أنَّ مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$ وحدة مربعة.

تحدٍّ: رُسِم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\overrightarrow{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}), \overrightarrow{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k}), \overrightarrow{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$$



40 إذا كانت $B(8, 3, -2)$، فأجد إحداثيات النقطة H.

41 أجد قياس الزاوية GAC مُقرَّبًا إلى أقرب عُشر درجة.

42 إذا كان X نقطة منتصف الضلع $\overline{EF}$، فأجد جيب تمام الزاوية DXC.

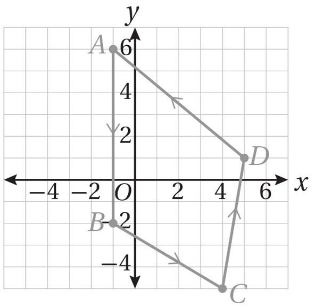
أستعد لدراسة الوحدة

الوحدة 5: المتجهات

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

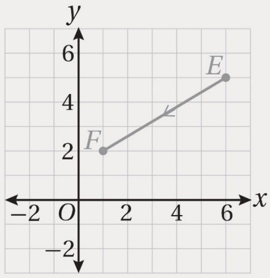
الصورة الإحداثية، ومقدار المتجه

مُعتمِدًا الشكل المجاور، أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقدار كلٍّ منها:



1. $\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{BC}$
3. $\overrightarrow{CD}$
4. $\overrightarrow{DA}$

مثال: مُعتمِدًا الشكل المجاور، أكتب المتجه $\overrightarrow{EF}$ بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.



نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{EF}$ هي: $E(6, 5)$، ونقطة نهايته هي: $F(1, 2)$.

وبذلك، فإنَّ:

المركبة الأفقية $x_2 - x_1 = 1 - 6 = -5$

المركبة العمودية $y_2 - y_1 = 2 - 5 = -3$

الصورة الإحداثية $\overrightarrow{EF} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$

بالتعويض $\overrightarrow{EF} = \langle -5, -3 \rangle$

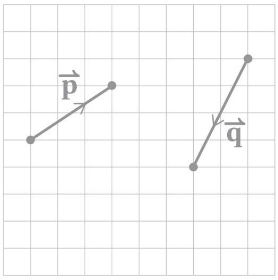
صيغة مقدار المتجه $\vec{\mathbf{v}} = \langle a_1 , a_2 \rangle$ $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$

بالتعويض $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2}$

بالتبسيط $= \sqrt{34}$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا

مُعتمِدًا الشكل المجاور، أُمثِّل كُلًّا ممّا يأتي هندسيًّا:

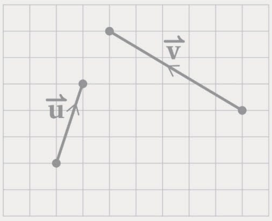


5. $2\vec{\mathbf{p}}$
6. $-\frac{1}{2}\vec{\mathbf{q}}$
7. $3\vec{\mathbf{p}} + 2\vec{\mathbf{q}}$
8. $2\vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{p}}$

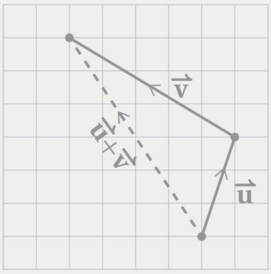
أستعد لدراسة الوحدة

الوحدة 5: المتجهات

مثال: مُعتمِدًا الشكل المجاور، أُمثِّل كُلًّا ممّا يأتي هندسيًّا:

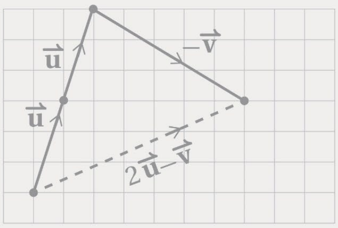


1) $\vec{u}+\vec{v}$



أسحب المتجه $\vec{u}$ ست وحدات إلى اليمين، ووحدة واحدة إلى الأسفل، بحيث تنطبق نقطة نهايته على نقطة بداية المتجه $\vec{v}$، ثم أرسم سهمًا من نقطة بداية المتجه $\vec{u}$ إلى نقطة نهاية المتجه $\vec{v}$، فينتج المتجه $\vec{u}+\vec{v}$ وَفق قاعدة المثلث لجمع المتجهات.

2) $2\vec{u}+\vec{v}$



الخطوة 1: أرسم المتجه $2\vec{u}$ بنسخ المتجه $\vec{u}$، ثم لصق بدايته عند نهاية المتجه $\vec{u}$ الأوَّل.

الخطوة 2: أعكس اتجاه المتجه $\vec{v}$، ثم أسحبه وحدة واحدة إلى الأعلى حتى تنطبق بدايته على نهاية المتجه $2\vec{u}$.

الخطوة 3: أرسم سهمًا من بداية المتجه $2\vec{u}$ إلى نهاية المتجه $-\vec{v}$، فينتج المتجه $2\vec{u}+(-\vec{v})$، أو المتجه $2\vec{u}-\vec{v}$.

- **جمع المتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية وطرحها وضربها في عدد حقيقي**

إذا كان: $\vec{u}=\langle 3,-2\rangle$، وكان: $\vec{v}=\langle 6,9\rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

9) $\vec{u}+\vec{v}$ 10) $\vec{v}-\vec{u}$ 11) $3\vec{u}+2\vec{v}$ 12) $-2\vec{u}+\vec{v}$

مثال: إذا كان: $\vec{m}=\langle 1,-3\rangle$، وكان: $\vec{n}=\langle -2,7\rangle$، فأجد $2\vec{m}+5\vec{n}$

$2\vec{m}+5\vec{n}=2\langle 1,-3\rangle+5\langle -2,7\rangle$ بالتعويض

$=\langle 2(1),2(-3)\rangle+\langle 5(-2),5(7)\rangle$ تعريف ضرب المتجه في عدد

$=\langle 2,-6\rangle+\langle -10,35\rangle$ بالتبسيط

$=\langle 2+(-10),-6+35\rangle$ تعريف جمع متجهين

$=\langle -8,29\rangle$ بالتبسيط

لوحدة 5: المتجهات

أستعد لدراسة الوحدة

الضرب القياسي، والزاوية بين متجهين

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

13) $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2, -5\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 3, -1\rangle$

14) $\vec{\mathbf{m}} = \langle -3, -4\rangle,\ \vec{\mathbf{n}} = \langle 8, 6\rangle$

15) $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 4\rangle, \vec{\mathbf{s}} = \langle 2, 3\rangle$

16) $\vec{\mathbf{q}} = \langle 11, 8\rangle, \vec{\mathbf{p}} = \langle -4, -5\rangle$

أجد قياس الزاوية بين كل متجهين ممّا يأتي:

17) $\vec{\mathbf{a}} = \langle 3, 7\rangle, \vec{\mathbf{b}} = \langle 5, 1\rangle$

18) $\vec{\mathbf{c}} = \langle 2, -3\rangle, \vec{\mathbf{d}} = \langle -6, 9\rangle$

19) إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{a}} = \langle 3n-4, -10\rangle$، والمتجه: $\vec{\mathbf{b}} = \langle 4, n\rangle$ مُتعامِدين، فما قيمة n؟

مثال: أجد قياس الزاوية بين المتجه: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 3, -2\rangle$، والمتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -4, -3\rangle$.

صيغة قياس الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}| \times |\vec{\mathbf{v}}|}$$

تعريف الضرب القياسي، ومقدار المتجه

$$= \frac{3(-4)+(-2)(-3)}{\sqrt{3^2+(-2)^2} \times \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{-6}{\sqrt{13} \times \sqrt{25}} \approx -0.3328$$

تعريف معكوس جيب التمام

$$\theta \approx \cos^{-1}(-0.3328)$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 109.4°$$

إذن، قياس الزاوية بين المتجهين هو: $109.4°$ تقريبًا.

الدرس 1

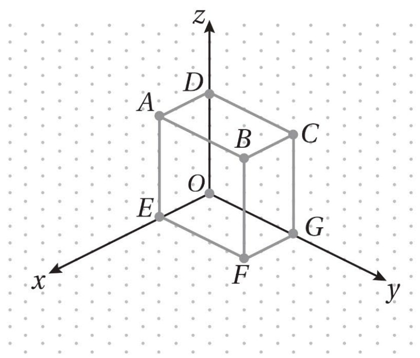
المتجهات في الفضاء

Vectors in Space

أُعيِّن كُلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

1. $A(0, 2, -3)$
2. $B(-1, 0, 4)$
3. $C(2, 4, 3)$
4. $D(-3, -2, -5)$

في متوازي المستطيلات المجاور، إذا كانت إحداثيات الرأس B هي: $(3, 5, 6)$، فأكتب إحداثيات كلٍّ ممّا يأتي:



5. الرأس A.
6. الرأس C.
7. الرأس D.
8. الرأس F.
9. مركز متوازي المستطيلات $ABCDOEFG$.

أكتب الصورة الإحداثية لكلٍّ من المتجهات الآتية، ثم أجد مقدار كلٍّ منها:

10. $\overrightarrow{AB}$، حيث: $A(-2, 5, 0), B(4, 9, -3)$.
11. $\overrightarrow{EF}$، حيث: $E(3, 4, 6), F(6, 8, -6)$.
12. $\overrightarrow{GH}$، حيث: $H(10, 7, 8), G(-2, 3, 2)$.

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه ممّا يأتي:

13. $\overrightarrow{AC} = 8\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 3\sqrt{5}\,\hat{\mathbf{k}}$
14. $\vec{\mathbf{v}} = \langle -5, 4, 20 \rangle$

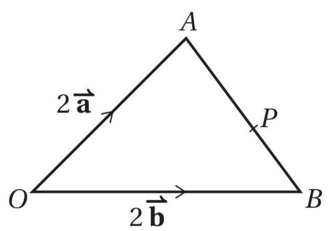
15. أجد متجهًا له نفس اتجاه المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$، ومقداره 52.

إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 3, -6 \rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16. $2\vec{\mathbf{u}} + 4\vec{\mathbf{v}}$
17. $3\vec{\mathbf{u}} - 2\vec{\mathbf{v}}$

18. أجد قيمة كلٍّ من الأعداد الحقيقية: a، و b، و c التي تُحقِّق المعادلة الآتية: $a\vec{\mathbf{u}} + 5\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

19. في المثلث OAB المجاور، تقع النقطة P على الضلع AB، حيث: $AP : PB = 5:3$. إذا كان: $\overrightarrow{OP} = k(3\vec{\mathbf{a}} + 5\vec{\mathbf{b}})$، فما قيمة العدد الحقيقي k؟



الدرس 1

يتبع

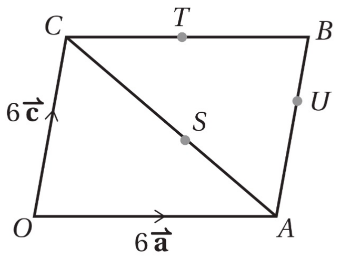
المتجهات في الفضاء
Vectors in Space

20 متجهـا الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -3, 4, -5\rangle$، و $\langle 0, -2, 4\rangle$ على الترتيب. أجد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$، علمًا بأنَّ: $\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$.

21 $ABCD$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{AD} = \vec{\mathbf{b}}$، و $\overrightarrow{AC} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$، و $\overrightarrow{BD} = -6\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$. أجد كُلًّا من $\vec{\mathbf{b}}$، و $\vec{\mathbf{a}}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

22 إذا كان: $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$، فأجد الأعداد الحقيقية: p, q, r التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$p\vec{\mathbf{a}} + q\vec{\mathbf{b}} + r\vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 28 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

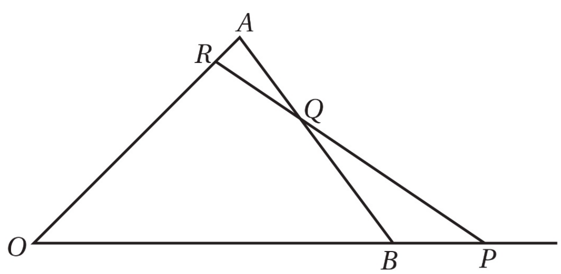


في الشـكل المجاور، $OABC$ متوازي أضلاع، فيه: $\overrightarrow{OA} = 6\,\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OC} = 6\,\vec{\mathbf{c}}$، والنقطة T هـي منتصف الضلع BC، والنقطة U تقع علـى الضلع AB، حيث: $AU : UB = 2 : 1$، والنقطة S تقع على القُطْر CA، حيث: $CS : SA = 3 : 2$.

أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$:

26 $\overrightarrow{UT}$ 25 $\overrightarrow{OU}$ 24 $\overrightarrow{AC}$ 23 $\overrightarrow{OB}$

30 $\overrightarrow{SB}$ 29 $\overrightarrow{US}$ 28 $\overrightarrow{OS}$ 27 $\overrightarrow{TA}$



في الشكل المجاور، إذا كان متجها الموقع للنقطة A والنقطة B بالنسبة إلى نقطة الأصل O هما: $\vec{\mathbf{a}}$، و $\vec{\mathbf{b}}$ على الترتيب، وكانت النقطة P تقع على امتداد $\overline{OB}$، حيث: $\overrightarrow{OP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{OB}$، والنقطة Q تقع على $\overline{AB}$، حيث: $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$، والنقطة R تقع على $\overline{OA}$، حيث: $\overrightarrow{OR} = \lambda\,\overrightarrow{OA}$، و $\overrightarrow{QR} = \mu\,\overrightarrow{PR}$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

31 أكتب كُلًّا من $\overrightarrow{OQ}$، و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$، و $\vec{\mathbf{b}}$.

32 أكتب $\overrightarrow{QR}$ بدلالة λ، و $\vec{\mathbf{a}}$، و $\vec{\mathbf{b}}$.

33 أكتب $\overrightarrow{QR}$ بدلالة μ، و λ، و $\vec{\mathbf{a}}$، و $\vec{\mathbf{b}}$.

34 أجد قيمة كلٍّ من λ، و μ.

الدرس 2

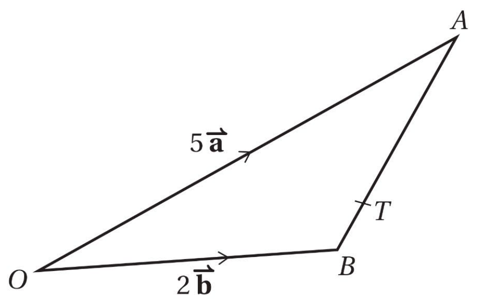
المستقيمات في الفضاء
Lines in Space

أُبيِّن إذا كان الشكل الرباعي ***ABCD*** في الحالتين الآتيتين متوازي أضلاع أم لا، مُبرِّرًا إجابتي:

1 $A(3, -2, 1), B(-4, 0, 8), C(-6, 5, 5), D(8, 1, -9)$

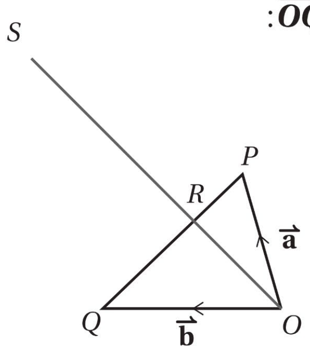
2 $A(12, 5, -8), B(6, 2, -10), C(-8, 1, 13), D(-2, 4, 15)$

3 إذا كانت: $A(2, 3, 1), B(6, 5, 4), C(3, 1, 5)$، وكان $ABCD$ متوازي أضلاع، فما إحداثيات D؟



4 في الشكل المجاور، OAB مثلث، فيه: $\overrightarrow{OA} = 5\vec{\mathbf{a}}$ و $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\mathbf{b}}$
والنقطة T تقع على الضلع AB، حيث: $AT : TB = 5 : 1$. أُبيِّن أنَّ $\overrightarrow{OT}$ يوازي $2\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$

في الشكل المجاور، $\boldsymbol{OPQ}$ مثلث، فيه: $\overrightarrow{RQ} = 2\,\overrightarrow{PR}$ ، و $\overrightarrow{OS} = 3\,\overrightarrow{OR}$، و $\overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OQ} = \vec{\mathbf{b}}$:



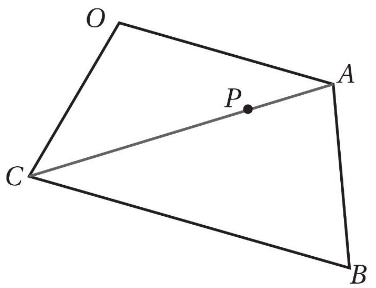
5 أُبيِّن أنَّ: $\overrightarrow{OS} = 2\,\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

6 أُضيفت النقطة T إلى الشكل، حيث: $\overrightarrow{OT} = -\vec{\mathbf{b}}$. أُثبِت أنَّ النقاط: S, P, T تقع على استقامة واحدة.

الدرس 2

يتبع

المستقيمات في الفضاء
Lines in Space



في الشكل الرباعي $OABC$ المجاور، $\overrightarrow{OA} = 8\vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{OC} = 7\vec{\mathbf{c}}$، و $\overrightarrow{CB} = 12\vec{\mathbf{a}}$،
والنقطة P تقسم $\overline{CA}$ بنسبة $3:2$

7 أجد المتجه $\overrightarrow{OP}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$، و $\vec{\mathbf{c}}$.

8 أُثبِت أنَّ النقاط: O, P, B تقع على استقامة واحدة.

9 أجد النسبة: $OP : PB$.

10 أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = 4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$، ويمرُّ بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

11 أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 5, 8 \rangle$، ويمرُّ بالنقطة A التي متجه موقعها هو: $\langle 2, -7, 11 \rangle$.

أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

13 $(-5, 4, 15), (7, 13, -8)$

12 $(1, -7), (6, 19)$

15 $(0, 2, -5), (9, 4, 6)$

14 $(5, 22, -8), (13, 10, 3)$

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 8, 4 \rangle + t\langle 3, -2, 9 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

16 هل تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l؟ أُبرِّر إجابتي.

17 إذا وقعت النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l، فأجد قيمة كلٍّ من b، و c.

18 ما إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz؟

يتبع

الدرس 2

المستقيمات في الفضاء
Lines in Space

19 إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, 2, 1\rangle + t\langle 4, a, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت:
$\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 4, 3\rangle + u\langle 3, -2, -9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأجد قيمة a التي تجعل $l_1 \parallel l_2$.

يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $U(p, -3, -1)$، و $V(2, 5, -3)$، وتقع النقطة $(7, 1, q)$ على l:

20 أجد قيمة p.

21 أكتب معادلة متجهة للمستقيم l.

22 أجد قيمة q.

23 إذا كانت $A(3, -2, 4)$، وكانت $B(6, 0, 3)$، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -2, 4\rangle + \lambda\langle 1, 2, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت النقطة D تقع على المستقيم l_1، حيث: $\lambda = 2$، فأجد معادلة متجهة للمستقيم l_2 الذي يمرُّ بالنقطة D، ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

أُحدِّد إذا كان المستقيمان: l_1، و l_2 متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

24 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 2, 1)$، و $(4, 3, 3)$، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 1, 1)$، و $(5, 1, 0)$.

25 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 3, 1)$، و $(3, 1, -2)$، ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(11, 7, -3)$، و $(9, 6, -2)$.

26 يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $A(2, 1, 3)$، و $B(5, -2, 1)$. إذا وقعت النقطة C على المستقيم l، وكان $AC = 3CB$، فأجد جميع إحداثيات النقطة C المُمكِنة.

27 المستقيمات الآتية معادلاتها المتجهة هي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$، و $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$، و $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
أُبيِّن أنَّ هذه المستقيمات تُكوِّن مثلثًا، ثم أجد أطوال أضلاعه.

الدرس 3

الضرب القياسي
Scalar Product

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\vec{\mathbf{u}}=\langle 4, 5, -3\rangle, \vec{\mathbf{v}}=\langle -2, 3, -7\rangle$

2 $\vec{\mathbf{e}}=\begin{pmatrix}-13\\8\\-5\end{pmatrix}, \vec{\mathbf{f}}=\begin{pmatrix}-2\\3\\10\end{pmatrix}$

3 $\vec{\mathbf{m}}=7\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}-9\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{n}}=2\hat{\mathbf{i}}-5\hat{\mathbf{j}}+10\hat{\mathbf{k}}$

4 إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{v}}=\langle 6, 5, a\rangle$ يُعامِد المتجه: $\vec{\mathbf{w}}=\langle 15, 24, -7\rangle$، فما قيمة a؟

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كلٍّ ممّا يأتي:

5 $\vec{\mathbf{a}}=5\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}}=2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$

6 $\vec{\mathbf{a}}=\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}}=-\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$

7 إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{a}}=\lambda\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$ والمتجه: $\vec{\mathbf{b}}=\lambda\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+\lambda\hat{\mathbf{k}}$ مُتعامِدين، فما قيمة (قِيَم) λ؟

8 إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-5\\14\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\-4\\12\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأجد قياس الزاوية الحادَّة بين هذين المستقيمين إلى أقرب عُشر درجة.

9 يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $(3, -5, 9)$، و $(-2, 11, 6)$، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 3, 8)$، و $(-5, 9, 12)$. أجد قياس الزاوية الحادَّة بين هذين المستقيمين إلى أقرب عُشر درجة.

10 إذا كان قياس الزاوية بين المتجه: $\langle v, 0, -1\rangle$ والمتجه: $\langle 2, -1, 0\rangle$ هو $60°$، فما قيمة v؟

11 إذا كان: $A(3, -2, 6)$، وكان: $B(-5, 4, 1)$، فأجد مساحة المثلث AOB، حيث O نقطة الأصل.

يتبع

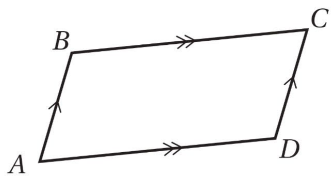
الضرب القياسي
Scalar Product

الدرس 3

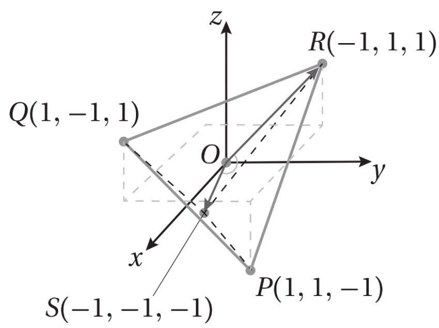
إذا مَرَّ المستقيم l بالنقطتين: $E(-3, 7, 12)$، و $F(1, -3, 5)$، وكانت النقطة $G(0, -6, 4)$ لا تقع على المستقيم l، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l.

13 البُعْد بين النقطة G والمستقيم l.



14 يُبيِّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع $ABCD$، حيث: $\overrightarrow{AB} = 6\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 11\hat{\mathbf{k}}$، و $\overrightarrow{AC} = 15\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$. أجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



15 **كيمياء:** تقع ذَرَّة الكربون في جزيء الميثان في نقطة الأصل، وتقع ذَرّات الهيدروجين عند النقاط: P, Q, R, S في الشكل المجاور. أجد قياس الزاوية بين $\overline{OR}$ و $\overline{OS}$ اللذين يُمثِّلان رابطة ذَرَّة الكربون بذَرَّتي الهيدروجين عند النقطة S والنقطة R.

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ p \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، والنقطة $A(9, -1, -14)$ تقع على المستقيم l_1، والنقطة C تقع على المستقيم l_2، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

16 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدين، فأجد قيمة q.

17 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فأجد قيمة p، وإحداثيات نقطة تقاطعهما.

18 رُسِمت دائرة مركزها النقطة C، فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين: A، و B. أجد متجه الموقع للنقطة B.

الدرس 3

يتبع

الضرب القياسي
Scalar Product

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -19 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، والنقطة $T(-2, 5, 8)$ تقع خارج المستقيم l، والنقطة F تقع على المستقيم l، حيث $\overrightarrow{TF}$ يُعامِد المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أُبيِّن أنَّ قيمة t التي تعطي النقطة F على المستقيم l هي: $t = \frac{13a + 44}{a^2 + 10}$.

20 إذا كانت $t = 5$ في الفرع السابق، فأجد متجهي الموقع المُمكِنين للنقطة F.

إحداثيات النقاط: A, B, C هي: $(3, -2, 4)$، و$(1, -5, 6)$، و$(-4, 5, -1)$ على الترتيب، والمستقيم l يمرُّ بالنقطة A، وله المعادلة المتجهة: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$:

21 أُبيِّن أنَّ النقطة C تقع على المستقيم l.

22 أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B.

23 إذا وقعت النقطة D على المستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B، بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

24 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدان.

25 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$.

26 يقع كل رأس من رؤوس المربع $ABCD$ إمّا على المستقيم l_1، وإمّا على المستقيم l_2. إذا كانت إحداثيات الرأس A هي: $(-5, 13, 4)$، فأجد إحداثيات رؤوسه الثلاثة الأُخرى.

إرشاد: لكي تقع جميع رؤوس المربع على المستقيمين المُتعامِدين l_2 و l_1؛ يجب أنْ تكون المسافة بين كل رأس ونقطة تقاطع المستقيمين متساوية.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كانت $A(-3, 4, 9), B(5, -2, 3)$، فإنَّ الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle -2, 2, 12\rangle$ b) $\langle 8, -6, -6\rangle$

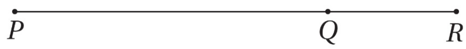
c) $\langle -1, 1, 6\rangle$ d) $\langle -8, 6, -6\rangle$

2 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, c, -5\rangle$، وكان: $|\vec{\mathbf{v}}| = 3\sqrt{5}$، فإنَّ c تساوي:

a) 4 b) $-3, 5$

c) 15 d) $-4, 4$

3 إذا كان PQR مستقيمًا، حيث: $PQ : QR = 3 : 1$، و $\overrightarrow{PQ} = \vec{\mathbf{a}}$، فإنَّ التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ هو:



a) $\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ b) $\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

c) $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ d) $-\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

4 النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, -2, 5\rangle + t\langle -2, 1, 3\rangle$، والإحداثي y لها 10 هي:

a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$

c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

5 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2,-2,5\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{w}} = \langle -3,4,6\rangle$، فإنَّ $3\vec{\mathbf{v}} - 2\vec{\mathbf{w}}$ يساوي:

a) $\langle 0, 2, 3\rangle$ b) $\langle 12, -14, 3\rangle$

c) $\langle 13, -16, -8\rangle$ d) $\langle -13, 16, 8\rangle$

6 إذا كان قياس الزاوية بين $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ هو $60°$، وكان: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 30$، وكان: $|\vec{\mathbf{a}}| = 10$، فإنَّ مقدار $\vec{\mathbf{b}}$ هو:

a) 3 b) 5

c) 6 d) 24

7 إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle -4, 2, a\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, b, 5\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{v}} \parallel \vec{\mathbf{u}}$، فإنَّ قيمة a هي:

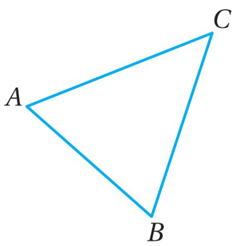
a) -10 b) -5

c) -1 d) 5

8 إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ مُتعامِدين، فإنَّ قيمة q هي:

a) 0 b) 8 c) 10 d) 18

9 في المثلث المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{AB} = 3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$، وكان: $\overrightarrow{BC} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$، فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عُشر درجة.



اختبار نهاية الوحدة

10 إذا وقعت النقاط: $E(2, 0, 4), F(h, 5, 1), G(3, 10, k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كلٍّ من h، وk؟

11 إذا كانت $A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

12 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l_1, l_2.

13 أجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيمين: l_1, l_2.

إذا كانت $A(1, 4, -5), B(3, 0, 2), C(-4, 1, 3)$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

14 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

15 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

16 إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$، فأُثبِت أنَّ: $\cos \theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$.

17 أجد مساحة المثلث ABC.

18 إذا كانت: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -25, 13 \rangle + t\langle 4, 5, -1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت النقطة V تقع على المستقيم l، حيث: $\overline{OV} \perp l$، فما إحداثيات النقطة V؟

يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: E، وF، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: G، وH. أُحدِّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

19 $E(7, 6, 34), F(5, 9, 16),$
$G(1, 21, -2), H(-13, -14, 19)$

20 $E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1),$
$G(7, 2, 11), H(1, -22, 23)$

21 في الشكل الرباعي $ABCD$ الآتي، مُدَّ AD على استقامته ليصل إلى النقطة E، حيث: $AD = 2\,DE$. إذا كان: $\overrightarrow{DA} = 14\vec{\mathbf{b}}$، وكان: $\overrightarrow{DC} = 5\vec{\mathbf{a}}$، وكان: $\overrightarrow{AB} = 15\vec{\mathbf{a}}$، فأُثبِت أنَّ B، وC، وE تقع على استقامة واحدة.