T10

TRANSFORMAÇÃO LINEAR NA ENGENHARIA DE PRODUÇÃO NUMA PERSPECTIVA CONTEXTUALIZADA

Jayanne Vieira Santos [1]*; Isabela Nunes de Oliveira* [2]*; Alex Victor do Rosário* [3]*.*

RESUMO: *Uma indagação comum aos alunos da engenharia de produção, ao estudar álgebra linear, é querer saber para que serve esta disciplina. Este trabalho apresenta uma abordagem de ensino de transformações lineares, conteúdo desta disciplina, visando responder principalmente a esta indagação, usando subsídios de uma ferramenta de trabalho muito importante na engenharia de produção, a programação linear (PL) que tem por finalidade maximizar ou minimizar uma função chamada de função objetivo. O experimento foi feito em forma de pesquisa de campo. Através de pesquisa bibliográfica foi elaborada uma aula de transformações lineares, usando a função objetivo, aplicada esta aula a grupos de 13 e 6 alunos, colhido informações deles em forma de questionário. Na aula é dito que a função objetivo é constituída de uma transformação linear somada com uma constante, explorada a definição de transformações lineares e exibido que uma consequência desta propriedade na função objetivo é fundamentar o Teorema de Máximos e Mínimos, que ensina como encontrar a solução de alguns problemas da PL e garante que a função objetivo possui valores máximos ou mínimos nas extremidades de uma região factível limitada. No questionário percebeu-se que, com este recurso, 92% dos alunos compreenderam o que é uma transformação linear e que todos perceberam a utilidade dela na engenharia de produção. Como conclusão, esta nova abordagem permite que o aluno de engenharia de produção estude as transformações lineares vendo como algo significativo e não como um recurso inútil.*

Palavras-Chave: Álgebra linear; Programação linear; Produção.

1 INTRODUÇÃO

Geralmente acredita-se que as ciências da área das exatas usam matemática. Isto reflete nos currículos dos cursos de engenharias, que normalmente contém disciplinas da

[1] Afiliação: Universidade Federal de Alagoas – Campus de Arapiraca – Unidade de Ensino de Penedo
Email: jaayvieiras@gmail.com
[2] Afiliação: Universidade Federal de Alagoas – Campus de Arapiraca – Unidade de Ensino de Penedo
Email: isabela.oliveira@arapiraca.ufal.br
[3] Afiliação: Universidade Federal de Alagoas – Campus de Arapiraca – Unidade de Ensino de Penedo
Email: alex.lxr@gmail.com

matemática. Em particular, na Engenharia de Produção há algumas dessas disciplinas, entre elas a Álgebra Linear. Normalmente os alunos deste curso encaram tal disciplina como muito abstrata e é comum a indagação do porquê estudar Álgebra Linear.

Diante desta problemática, este trabalho apresenta uma nova abordagem de ensino de transformações lineares, um conteúdo da álgebra linear, para a engenharia de produção, onde é comentada a aplicação destas transformações na Programação Linear.

O objeto de estudo específico da Programação Linear (PL) é maximizar ou minimizar a função dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b, \qquad \text{(Equação 01)}$$

chamada de função objetivo, em que as variáveis $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ estão sujeitas à determinadas restrições, sendo a PL uma das ferramentas de trabalho do engenheiro de produção.

A PL tem grande importância dentro da engenharia de produção. Por exemplo, na área de controle de produção e de estoque ela pode ser aplicada, de acordo com Taha (2008), desde a alocação de máquina para atender a demanda até o uso de estoque para amenizar impactos de imprevista mudança na demanda para determinada projeção de planejamento e do uso de contratação e demissão devido às mudanças nas necessidades de mão-de-obra.

De acordo com Goldbarg e Luna (2005) o modelo de PL é básico e serve para compreensão dos demais modelos de Programação Matemática. Daí, entende-se a grande importância da PL em face de tantas outras programações diferentes desta.

Neste trabalho será ressaltado que a função objetivo descrita na Equação 01 é a soma de uma transformação linear com uma constante e isto serve como uma grande fundamentação para o teorema de máximos e mínimos da PL e, consequentemente, para diversas soluções de problemas da mesma.

A escolha deste tema surgiu através da indagação das autoras deste artigo, assim como as mesmas observaram que os demais alunos do curso também tinham a curiosidade de saber a necessidade do estudo da Álgebra Linear de maneira aplicada à Engenharia de Produção.

2 METODOLOGIA

Nesta seção está descrito o método de pesquisa utilizado, bem como foi feito o experimento, coleta de dados e o modelo da aula aplicado durante o experimento.

2.1 Descrição do método

O artigo foi desenvolvido através de um estudo de campo, da seguinte maneira: uma pesquisa bibliográfica para elaboração de uma aula de Álgebra Linear, sobre transformações lineares, usando a função objetivo da Programação Linear, que será descrita abaixo; em seguida esta aula foi aplicada, na sala de aula 2 do Anexo 1 da Unidade de Ensino de Penedo, Campus Arapiraca, da Universidade Federal de Alagoas, em dois momentos, em seguida foi aplicado um questionário, para a coleta de dados aos alunos participantes de uma dessas aulas, onde foi perguntado:

- Na abordagem dada na aula é possível notar a importância das transformações lineares para a formação geral do engenheiro de produção?
- Estudar transformações lineares só é útil para o engenheiro de produção que irá desenvolver pesquisas que lide diretamente com programações?
- Um curso de álgebra linear em que são exibidas aplicações na engenharia de produção tal como a função objetivo, motiva o aprendizado desta disciplina?
- A função objetivo deve ser introduzida no curso de álgebra linear de engenharia de produção ou apenas estudada em outras disciplinas específicas?

2.2 Descrição do modelo de aula aplicada

A programação linear é uma ferramenta que lida especificamente em maximizar e minimizar uma função, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de função objetivo, dada por

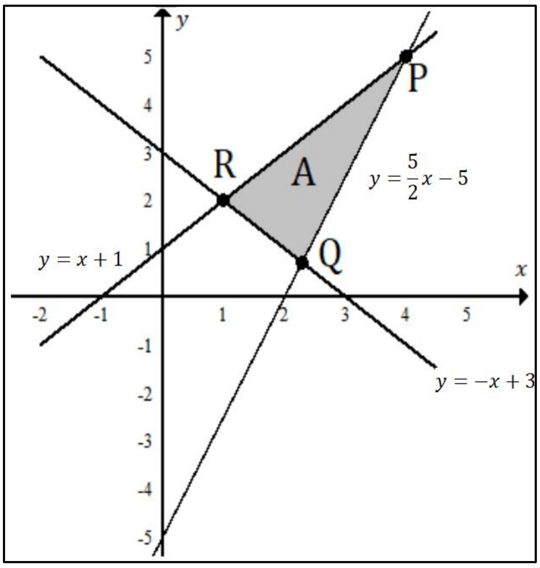
$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b, \quad \text{(Equação 02)}$$

com $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Em que são impostas certas restrições às variáveis $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. A região $A \subset \mathbb{R}^n$, formada pelos pontos $X = (x_1, \dots, x_n)$, em que vale tais restrições às variáveis $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, é chamada de região viável ou região factível. O ponto $X = (x_1, \dots, x_n)$, que maximiza ou minimiza f é chamado de solução ótima.

Exemplo 1: Qual o maior valor que a função dada por $f(x, y) = 10x + 3y$ pode assumir, se $y - x \leq 1; y + x \geq 3; y - 2{,}5x \geq -5$?

Neste exemplo, a função objetivo é $f(x, y) = 10x + 3y$ e a região factível é a região destacada, A, na figura 1:

Figura 1. Região factível



Fonte: Autores

O teorema de máximos e mínimos de PL, enunciado mais adiante, diz que o valor máximo de $f(x,y) = 10x + 3y$, ocorre em um dos vértices $P(4,5), Q(\frac{16}{7},\frac{5}{7})$ ou $R(1,2)$ da região A. Este Teorema é provado usando que na função objetivo tem-se uma Transformação Linear somada uma constante.

DEFINIÇÃO (de Transformação Linear): Uma transformação linear é uma aplicação $T: U \to V$, em que U e V são dois espaços vetoriais, se $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para todos $u \in U$ e $v \in U$ e $T(ku) = kT(u)$, para todos $k \in \mathbb{R}$ e $u \in U$.

Exemplo (de Transformação Linear): $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $T(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, com $a_1, \dots, a_n$ constantes, é uma transformação linear.

Com efeito, dados $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $T(u + v) = T(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = a_1x_1 + a_1y_1 + \cdots + a_nx_n + a_ny_n = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n$. E para todo $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, para todo $k \in \mathbb{R}$, $T(ku) = T(kx_1, \dots, kx_n) = a_1kx_1 + \cdots + a_nkx_n = k(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = kT(u)$.

Desta maneira, a função objetivo da programação linear, $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$, pode ser reescrita:

$$f(x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) + b, \qquad \text{(Equação 03)}$$

em que $T(x_1, \dots x_n)$ é uma transformação linear do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Por isto, a função objetivo é chamada de transformação afim, em particular quando $b = 0$, ela é uma transformação linear.

Um importante Teorema que diz como resolver vários problemas da PL é o Teorema de Máximos e Mínimos, também conhecido como Teorema Fundamental da Programação Linear:

TEOREMA (Máximos e Mínimos) Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \dots x_n)a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$, e A uma região poliedral convexa do $\mathbb{R}^n$. Nestas condições se f assume um valor máximo (ou mínimo) em A, então este valor será assumido em um dos vértices de A (se possuir) caso não possua vértices, isto ocorrerá nas extremidades de A.

A demonstração deste teorema não será feita aqui, mas, ele é uma consequência de dois lemas enunciados e provados a seguir:

Lema 1. Sejam $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + q_nx_n + b$ e P um ponto interior do segmento de reta $\overline{AB}$, então $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ ou $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$.

Prova: A função objetivo é da forma $f(x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) + b = T(x) + b$, com $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $T(x_1, \dots, x_n) = T(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, que é uma transformação linear. Como P é um ponto interior do segmento de reta $\overline{AB}$, então $P = (1-t)A + tB$, com $0 < t < 1$. Assim, $f(P) = T(P) + b = T\big((1-t)A + tB\big) + b = (1-t)T(A) + tT(B) + b$. Pois, T é uma transformação linear. Supondo $f(A) \leq f(B)$, então $\mathrm{T}(A) + b \leq T(B) + b$, ou seja, $T(A) \leq T(B)$. Assim, $(1-t)T(A) + tT(A) + b \leq f(P) \leq (1-t)T(B) + tT(B) + b \Longrightarrow T(A) - tT(A) + tT(A) + b \leq f(P) \leq T(B) - tT(B) + T(B) + b \Longrightarrow T(A) + b \leq f(P) \leq T(B) + b \Longrightarrow f(A) \leq f(P) \leq f(B)$.

De modo análogo, obtem-se $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$ caso seja suposto $f(B) \leq f(A)$.

Lema 2. Sejam $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + q_nx_n + b$ e P um ponto interior do segmento de reta $\overline{AB}$, se no segmento de reta $\overline{AB}$, f assumir um valor mínimo (ou máximo) em P, então f será constante no segmento de reta $\overline{AB}$.

Prova: Seja P um ponto interior do segmento de reta $\overline{AB}$. Admitindo que admitir que $f(P) \leq f(X)$ para todo $x \in \overline{AB}$, ou seja, $f(P)$ é o valor mínimo de f em $\overline{AB}$. Pelo Lema anterior, $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ ou $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$. Supondo que $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$. Logo, $f(A) \leq f(P)$ e $f(P) \leq f(A)$, pois, $A \in \overline{AB}$, ou seja, $f(A) = f(P)$. Segue-se que f assume o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta $\overline{AB}$, exceto em B, f assume este mesmo valor em B, pois em textos de cálculo avançado mostrar-se que uma transformação linear é uma função contínua, logo f deve ser contínua em B. Portanto, f é constante em todo segmento de reta $\overline{AB}$.

De modo análogo mostra-se que f é constante em $\overline{AB}$, supondo P um ponto interior de $\overline{AB}$ e $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$.

Na demonstração do lema 1, usou-se que T, na equação 02, é uma transformação linear, o lema 2 é uma consequência do Lema 1, o Teorema de Máximos e Mínimos é demonstrado e entendido usando estes dois lemas, ou seja, a linearidade de T na equação 03 é uma grande fundamentação para o Teorema de Máximos e Mínimos da PL.

Voltando ao exemplo 1 e comparando os valores de f nos pontos $P(4,5)$, $Q(\frac{16}{7},\frac{5}{7})$ e $R(1,2)$, o Teorema de máximos e mínimos garante que a solução ótima é $P(4,5)$.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os alunos envolvidos nesta inserção à nova ferramenta de ensino participaram de aulas expositivas em dois momentos, por ocasião da pesquisa aqui presente, em que no primeiro momento houve a presença de 13 alunos e no segundo 6 alunos, conforme mostra as Figuras abaixo:

Figura 2. Primeiro momento da aula experimental fundamentada na função objetivo

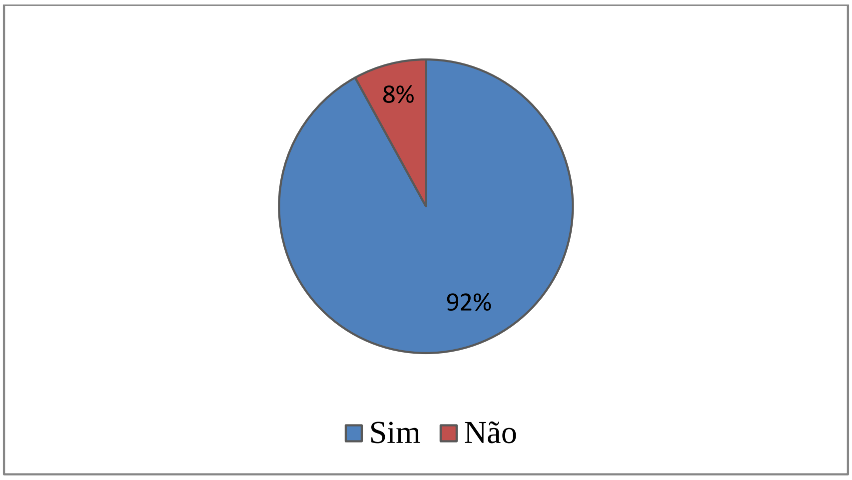
Fonte: Autores.

Figura 3. Segundo momento da aula experimental fundamentada na função objetivo

Fonte: Autores.

Ao analisar as respostas ao questionário, após a realização das aulas expositivas no modelo descrito na seção anterior, foi identificado o percentual de alunos quanto à compreensão da função objetivo ser constituinte de uma transformação linear somada a uma constante, este percentual é abordado no Gráfico 1:

Gráfico 1: Compreensão da linearidade da função objetivo.



Fonte: Autores.

No que se refere à importância das transformações lineares para o engenheiro de produção, dos alunos que responderam ao questionário foi constatado o que mostra a Tabela 1:

Tabela 1: Comparação quanto à importância da transformação linear para o engenheiro de produção.

A importância da transformação linear	É importante	Não é importante
Na formação geral do engenheiro de produção	83%	17%
Apenas na formação do engenheiro de produção pesquisador das áreas, tais como, programação, produção e controle de estoques	17%	83%
Para a formação do engenheiro de produção pesquisador das áreas, tais como, programação, produção e controle de estoques	100%	0%

Fonte: Autores.

Por fim, quanto à aceitação desta nova abordagem de ensino, 100% dos alunos são favoráveis à proposta feita, conforme mostra a Tabela 2:

Tabela 2: Aceitação da nova abordagem exposta.

Pergunta	Sim	Não
A função objetivo deve ser inserida como exemplo nas aulas de Álgebra Linear no curso de Engenharia de Produção?	100%	0%
Usar aplicações da Álgebra Linear na Engenharia de Produção é importante para estudar essa disciplina?	100%	0%

Fonte: Autores.

4 CONCLUSÕES

Diante dos dados apontados na seção anterior, conclui-se que a abordagem de ensino da álgebra linear na engenharia de produção proposta, esclarece ao estudante a importância do estudo de transformações lineares para a sua formação, auxilia ele identificar o que é uma transformação linear, torna o aprendizado da disciplina mais significativo. Outrossim, outros exemplos que evidenciem a aplicação desta referida disciplina ao curso de engenharia de produção, devem serem apresentados no ensino da mesma para o estudante desta área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, J. L.. et al. **Álgebra Linear**. Harbra, 3. ed. São Paulo. 1986.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Elsevier, 2. ed. Rio de Janeiro. 2005.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional.** Pearson, 8. ed. São Paulo- SP. 2008.

HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Bookman, 8. ed. Porto Alegre. 2001.