

T10

METODOLOGIA DE ANÁLISE DE ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS PELO MÉTODO DAS FORÇAS COM AUXÍLIO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

Wiu José de Lima Júnior ¹; Brendha Fernanda Siqueira da Silva ²

RESUMO: *O ensino com o auxílio de novas técnicas e recursos computacionais tem sido empregado com êxito, tanto no Brasil quanto no exterior, ajudando alunos e professores a tornarem o aprendizado mais criativo, inovador, produtivo, fácil, rápido e eficiente. Em meio a esse cenário, este trabalho descreve uma metodologia para proporcionar a discentes e docentes dos cursos de Engenharia um material de apoio à compreensão, fixação e exposição de conceitos referentes à análise das estruturas hiperestáticas e suas aplicações, pelo método das forças, com auxílio de softwares computacionais. Com base nos resultados foi notado que o material didático produzido pode proporcionar uma nova opção para os alunos ampliarem seus conhecimentos, aumentando a motivação em relação ao conteúdo tratado, facilitando a aprendizagem e introduzindo ferramentas computacionais em seus estudos.*

Palavras-Chave: Ensino de Engenharia; Estrutura hiperestática; Método das forças; Recursos computacionais.

1 INTRODUÇÃO

Existe uma preocupação crescente no ensino da Engenharia quanto à evolução tecnológica, apesar de possuir o principal objetivo de formar profissionais qualificados para o mercado de trabalho, em muitas situações esse objetivo se contrapõe a metodologia acadêmica tradicional adotadas nas universidades, baseada basicamente em quatro negro e aulas projetadas, que podem já não atender às expectativas do mercado (KAMP, 2016; SILVEIRA, 2004). Assim, é notada a necessidade de adotar tecnologias e ferramentas como material auxiliar no ensino e na aprendizagem, que poderão ajudar o ensino superior a se tornar mais criativo, inovador e produtivo (JOHNSON *et al.*, 2017).

Dessa forma, novos rumos no ensino da Engenharia vêm sendo tomados, com uma mudança no enfoque e na metodologia de ensino, sendo algumas delas: desenvolver no aluno a capacidade de autoaprendizagem, disponibilizar materiais didático-pedagógicos focando no ensino dos conceitos básicos e estimular a introdução de *software* nos estudos (KLOPFER, 2016; SILVEIRA, 2004).

¹ Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Universidade Federal de Alagoas/Campus A. C. Simões)
Email: wiu.junior@ctec.ufal.br

² Arquiteta e Urbanista
Email: bee_ribeiro@hotmail.com

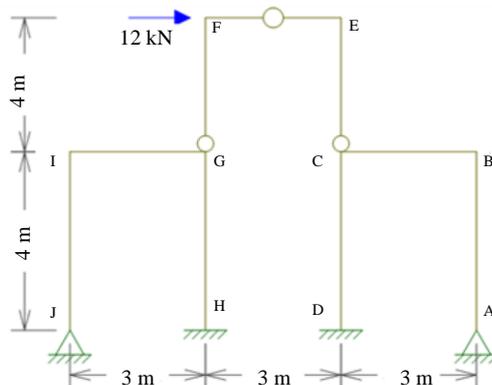
Em meio às circunstâncias apresentadas, este trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia para auxiliar o ensino da engenharia, dessa forma busca-se facilitar o entendimento da análise de uma estrutura hiperestática pelo método das forças, com uso de *softwares* computacionais, assim podendo estimular os alunos a incorporar diferentes ferramentas nos seus estudos. Este conteúdo se baseia em conhecimentos transmitidos em livros clássicos de vários autores, principalmente os de Martha (2010), Süsskind (1977) e White, Gergely e Sexsmith (1976).

2 METODOLOGIA

2.1 Identificação do Problema

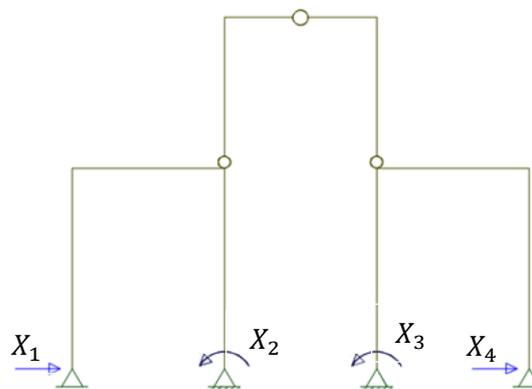
Foi definido arbitrariamente, usando o *software* Ftool, um quadro plano hiperestático (Figura 1), para a sua criação pode-se realizar diferentes etapas. Comumente, inicia-se pela criação de uma barra, através da ligação de dois pontos (nós), repetindo o processo é construída a estrutura de interesse. Em seguida são estabelecidas as condições de vinculação, rótulas e carregamentos externos. Por fim, são atribuídas as propriedades dos materiais e propriedades das seções (devido a limitação de espaço mais informações podem ser buscadas em manuais específicos). Para a estrutura em pauta (quadro plano hiperestático) todas as barras têm os mesmos valores para momento de inércia ($36 \times 10^{-4} \text{ m}^4$) da seção transversal e módulo de elasticidade ($E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$) do material.

Figura 1: Estrutura utilizada



Fonte: Autor.

Figura 2: Sistema Principal (SP) adotado e Hiperestáticos



Fonte: Autor.

2.2 Determinação do Grau de Hiperestaticidade

Como a estrutura é hiperestática não é possível determinar os valores das reações de apoio da estrutura utilizando apenas as três equações de equilíbrio disponíveis. É proposto a determinação do número de hiperestaticidade (g) para pórticos planos sem separação nas rótulas, similar a abordagem realizada por Martha (2010), na seção 3.8.1 do seu livro, essa abordagem é mais simples em relação as outras, o que pode minimizar erros. O procedimento consiste basicamente em visualiza o pórtico de uma forma global, ou seja, não separa o pórtico pelas rótulas, e em seguida aplicar a eq. 01, para determinar o número de incógnitas excedentes ao número de equações de equilíbrio, que é definida por:

$$g = [(NCRA) + (NA)x3] - [3 + (NVAI)] \quad (\text{Equação 01})$$

Sendo:

$NCRA$ → número de componentes de reação de apoio;

NA → número de anéis ou ciclos fechados de um quadro plano;

$NVAI$ → número de equações vindas de articulações internas.

Assim, utilizando a eq. 01, para o quadro hiperestático (Figura 1), tem-se:

$$g = [(10) + (0)x3] - [3 + (3)] = 4$$

2.3 Sistema Principal (SP) e os Casos (0), (1), (2), (3) e (4)

Em seguida deve-se determinar o Sistema Principal (SP), a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio), o número de vínculos que devem ser eliminados é o necessário para transformar a estrutura hiperestática original em uma estrutura isostática, isto é deve ser igual ao grau de hiperestaticidade (g), que estão associados aos hiperestáticos escolhidos. A escolha do SP é arbitrária, qualquer estrutura isostática escolhida é válida, desde que seja estável estaticamente. Note que foram eliminados quatro vínculos externos da estrutura original: a imposição de rotação θ_H e θ_D nula e a imposição de deslocamento horizontal H_J e H_A nulo (Figura 2).

Os esforços associados aos vínculos eliminados são as reações de apoio que estão indicadas na Figura 2. Esses esforços são chamados de hiperestáticos e são as incógnitas da solução pelo Método das Forças. Utiliza-se a nomenclatura X_j para indicar os hiperestáticos, sendo j o seu índice que varia de 1 a g . Na estrutura, tem-se:

$$X_1 = H_J \rightarrow \text{reação horizontal associada ao vínculo de apoio } H_J=0;$$

$$X_2 = M_H \rightarrow \text{reação momento associada ao vínculo de apoio } \theta_H=0;$$

$$X_3 = M_D \rightarrow \text{reação momento associada ao vínculo de apoio } \theta_D=0;$$

$$X_4 = H_A \rightarrow \text{reação horizontal associada ao vínculo de apoio } H_A=0;$$

Os hiperestáticos são mostrados na Figura 2 com sentidos que foram convencionados como positivos: momento positivo no sentido anti-horário e força horizontal positiva com sentido da esquerda para a direita.

- **Caso (0) – Solicitações externa (carregamento) isolado no SP**

Para o SP considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo. Isto corresponde ao Caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga δ_{i0} .

Um termo de carga, δ_{i0} , é definido formalmente como deslocamento ou rotação na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_j quando a solicitação externa atua isoladamente no SP (com hiperestáticos com valores nulos).

A Figura 3 exemplifica o Caso (0), mostrando o efeito isolado da solicitação externa (carregamento aplicado) no SP, a configuração deformada (com fator de amplificação) e os deslocamentos horizontais δ_{10} e δ_{40} e as rotações δ_{20} e δ_{30} , nas direções dos vínculos eliminados para criação do SP.

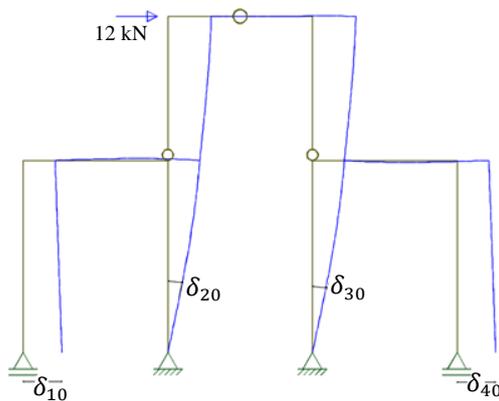
- **Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP**

A Figura 5 mostra a configuração deformada (com fator de amplificação) do SP no Caso (1). O hiperestático X_1 é colocado em evidência, já que ele é uma incógnita do problema. Considera-se um valor unitário para X_1 , sendo o efeito $X_1=1$ multiplicado pelo valor final que X_1 deverá ter. O deslocamento horizontal δ_{11} e a rotação δ_{21} provocados por $X_1=1$, nas direções dos vínculos eliminados para criação do SP, são chamados de coeficientes de flexibilidade. Formalmente um coeficiente de flexibilidade, δ_{ij} , é definido como o deslocamento ou rotação na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i provocado por um valor unitário do hiperestático X_j atuando isoladamente no SP.

- **Caso (2), (3) e (4) – Hiperestático X_2 , X_3 , e X_4 isolado no SP, respectivamente**

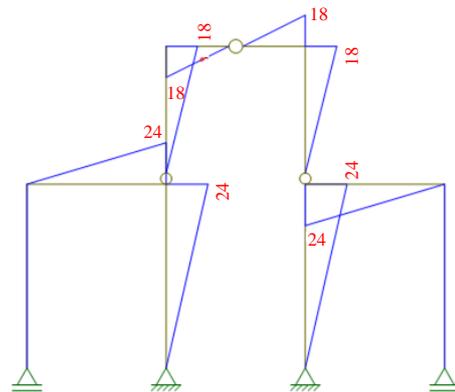
De maneira análoga ao Caso (1), para o Caso (2), (3) e (4) o hiperestático X_2 , X_3 e X_4 , é colocado em evidência, por sua vez, considerando-se um valor unitário multiplicado pelo seu valor final (Figuras 6, 7 e 8, respectivamente).

Figura 3: Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



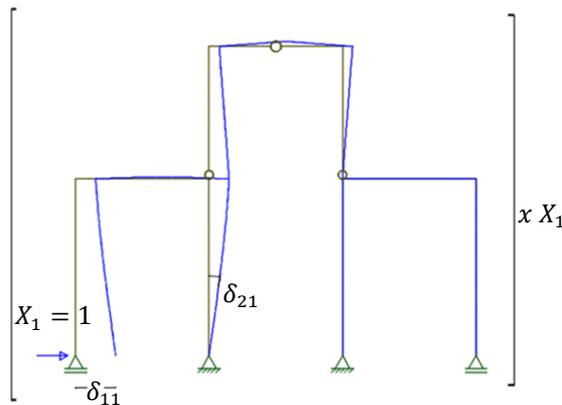
Fonte: Autor.

Figura 4: Diagrama do Momento Fletor (DMF), para o Caso (0), em kNm



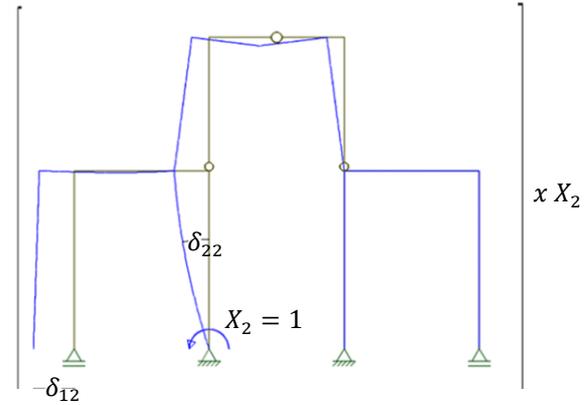
Fonte: Autor.

Figura 5: Hiperestático X_1 isolado no SP



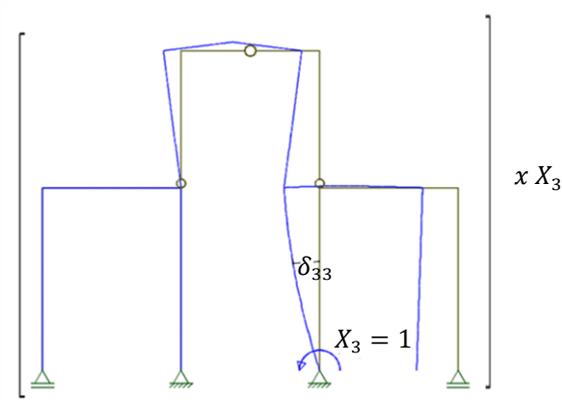
Fonte: Autor.

Figura 6: Hiperestático X_2 isolado no SP



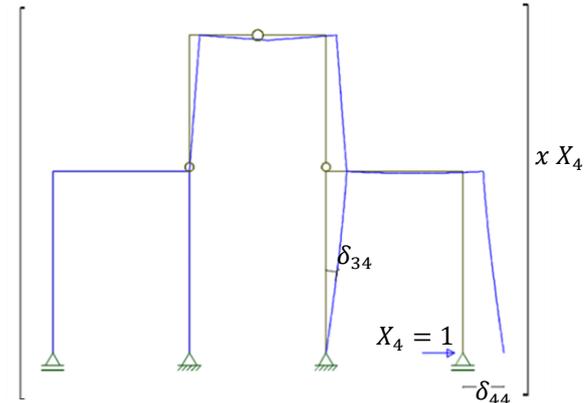
Fonte: Autor.

Figura 7: Hiperestático X_3 isolado no SP



Fonte: Autor.

Figura 8: Hiperestático X_4 isolado no SP



Fonte: Autor.

2.4 Restabelecimento das condições de compatibilidade

De acordo com a metodologia do método das forças, a superposição dos Casos (0), (1), (2), (3) e (4) é utilizada para recompor as condições de compatibilidade que foram violadas na criação do SP. Para tanto, somam-se os valores das descontinuidades de deslocamento axial, de deslocamento transversal e de rotação, impondo-se que essas somas tenham valores nulos. Isso resulta em um sistema com quatro equações de compatibilidade:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 = 0 \quad (\text{Equação 02})$$

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 = 0 \quad (\text{Equação 03})$$

$$\delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 = 0 \quad (\text{Equação 04})$$

$$\delta_{40} + \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 = 0 \quad (\text{Equação 05})$$

O cálculo dos coeficientes que aparecem nesse sistema de equações é feito com auxílio do Princípio das Forças Virtuais (PFV). O PFV trabalha com um sistema real de deformação, no qual se quer calcular um deslocamento em algum ponto, e um sistema de forças virtuais, com uma força aplicada no ponto e na direção do deslocamento que se quer calcular.

2.5 Determinação dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade

Neste exemplo, os termos de carga e os coeficientes de flexibilidade podem ser calculados utilizando PFV, o cálculo da parcela de energia de deformação virtual por flexão também é decomposto em um somatório de integrais computadas em cada barra:

$$\frac{1}{EI} \int_{estrutura} M_1 M_0 dx = \sum_{barras} \left[\frac{1}{EI} \int_{barra} M_1 M_0 dx \right] \quad (\text{Equação 06})$$

Sendo:

E → módulo de elasticidade do material;

I → momento de inércia da seção transversal;

M_1 → diagramas de momentos fletores real;

M_0 → diagramas de momentos fletores virtual.

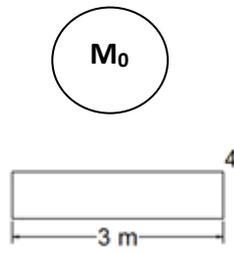
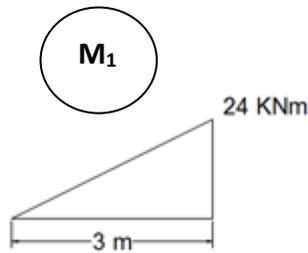
Para entender melhor como é usada a eq. 06 será mostrado um exemplo a seguir.

- **Cálculo de δ_{10}**

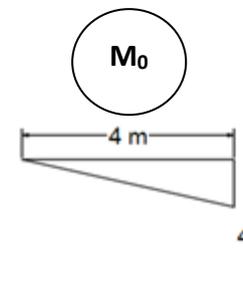
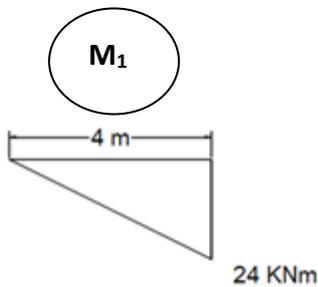
No termo de carga pelo PFV, o sistema real de deformação é o Caso (0), Diagrama de Momento Fletor (DMF) apresentado na Figura 5, e o sistema de forças virtuais é o Caso (1). Portanto, a expressão para esse coeficiente, desprezando deformações por cisalhamento, é:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int M_1 M_0 dx$$

Essas integrais são calculadas com base na tabela de combinação de diagramas de momentos fletores em barra, que pode ser encontrada no apêndice do livro de Martha (2010), para essa situação:



$$\int_0^l M_1 M_0 dx = \frac{1}{2} M_1 M_0 l = \frac{1}{2} 4 \times 24 \times 3 = 144$$



$$\int_0^l M_1 M_0 dx = \frac{1}{3} M_1 M_0 l = \frac{1}{3} 4 \times 24 \times 4 = 128$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} (144 + 128) = \frac{272}{EI}$$

De maneira similar são determinados todos os termos de carga e coeficientes de flexibilidade. Os coeficientes δ_{ij} e δ_{ji} , sendo i e j índices de hiperestáticos, sempre serão iguais, isso é demonstrado pelo teorema de Maxwell, dessa forma: $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{13} = \delta_{31}$, $\delta_{14} = \delta_{41}$, $\delta_{23} = \delta_{32}$, $\delta_{24} = \delta_{42}$, $\delta_{34} = \delta_{43}$.

É notado que para utilizar a eq. 06 é necessário determinar o DMF para cada um dos Casos (0), (1), (2), (3) e (4), dessa forma é recomendado utilizar o *software* Ftool para efeito comparativo. Uma vez que a estrutura já foi desenhada no Ftool para cada Caso, com o respectivo hiperestático e vinculação, clica-se em “Diagram Results” e em seguida, para verificar os esforços atuantes nas barras, clica-se em um dos botões que estão situados no canto superior direito (devido a limitação de espaço não foi colocado o DMF para todos os Caso).

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Cálculo dos hiperestáticos

Após ser determinado todos os termos de carga e coeficientes de flexibilidade, pode-se utilizar superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP.

Usando as eqs 02 a 05 é montados o seguinte sistema de equações de compatibilidade:

$$\frac{272}{EI} + \frac{272}{3EI}X_1 - \frac{14}{EI}X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 0; \quad -\frac{72}{EI} - \frac{14}{EI}X_1 + \frac{5}{EI}X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 0$$
$$-\frac{72}{EI} + 0X_1 + 0X_2 + \frac{5}{EI}X_3 - \frac{14}{EI}X_4 = 0; \quad \frac{272}{EI} + 0X_1 + 0X_2 - \frac{14}{EI}X_3 + \frac{272}{3EI}X_4 = 0$$

Com o uso do *software* MATLAB a solução desse sistema resulta nos seguintes valores de reações de apoio:

$$X_1 = \frac{-264}{193} \text{ kN}; \quad X_2 = \frac{2040}{193} \text{ kNm}; \quad X_3 = \frac{2040}{193} \text{ kNm}; \quad X_4 = \frac{-264}{193} \text{ kN}$$

3.2 Obtenção dos esforços internos

Os esforços internos finais da estrutura hiperestática original são obtidos através da superposição dos esforços internos de casos básicos. Os momentos fletores (M) podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de momentos fletores (M_i) dos casos básicos:

$$M = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + M_4X_4$$

$$M_A = 0 + 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 0$$

$$M_B = 0 + 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + -4x \left(\frac{-264}{193} \right) = 5,47 \text{ KNm}$$

$$M_C = -24 + 0X_1 + 0X_2 + 1x \left(\frac{2040}{193} \right) + -4x \left(\frac{-264}{193} \right) = -7,96 \text{ KNm}$$

$$M_D = 0 + 0X_1 + 0X_2 + 1 \left(\frac{2040}{193} \right) + 0X_4 = 10,57 \text{ KNm}$$

$$M_E = 18 + 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 18 \text{ KNm}$$

$$M_F = -18 + 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 = -18 \text{ KNm}$$

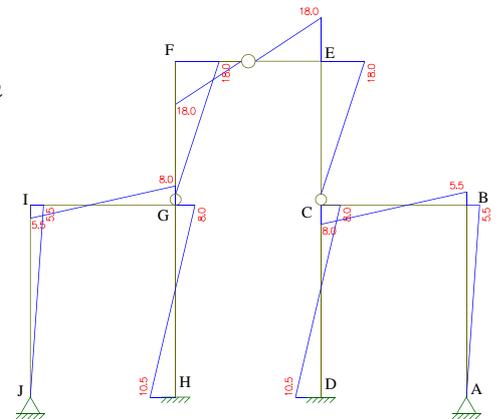
$$M_G = 24 + 4x \left(\frac{-264}{193} \right) + -1x \left(\frac{2040}{193} \right) + 0X_3 + 0X_4 = 7,96 \text{ KNm}$$

$$M_H = 0 + 0X_1 + -1x \left(\frac{2040}{193} \right) + 0X_3 + 0X_4 = -10,57 \text{ KNm}$$

$$M_I = 0 + 4x \left(\frac{-264}{193} \right) + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 = -5,47 \text{ KNm}$$

$$M_J = 0 + 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 0$$

Figura 9: DMF da estrutura estudada



Fonte: Autor.

É notado que os pontos calculados (pela superposição dos diagramas de momentos fletores) quando comparados com os respectivos pontos apresentados no DMF da estrutura hiperestática estudada, gerado pelo Ftool (Figura 09), apresentam praticamente o mesmo valor, mostrando a eficácia da metodologia apresentada.

4 CONCLUSÕES

O trabalho atingiu seu objetivo apresentando uma metodologia, com o auxílio de ferramentas computacionais, para análise de uma estrutura hiperestática pelo método das forças, a contribuição que esse material traz, em relação as outras referências que apresentam o assunto, são as etapas para resolução do problema com maior detalhamento e uma linguagem mais acessível, de forma que seja mais fácil a compreensão dos alunos perante o assunto.

Dessa forma, com o material produzido será possível proporcionar uma nova opção para os alunos ampliarem seus conhecimentos, aumentando a motivação em relação ao conteúdo tratado, facilitando a aprendizagem e introduzindo ferramentas computacionais em seus estudos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

JOHNSON, L.; BECKER, S, A., CUMMINS, M.; ESTRADA, V.; FREEMAN, A.; HALL, C. **NMC Horizon Report: 2016 Higher Education Edition**. Austin, Texas: The New Media Consortium, 2016.

KAMP, A. **Engineering Education in a Rapidly Changing World: Rethinking the Vision for Higher Education. Second Revised Edition**. 4TU - Centre for Engineering Education, 2016.

KLOPFER, J. **Augmented Learning: Research and Design of Mobile Education Games**, MIT Press, 2016.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Editora Campus/Elsevier, 2010.

SILVEIRA, P. M. Reflexões sobre o ensino da engenharia no contexto da evolução tecnológica. In: **XXXII CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA**. Universidade Federal de Brasília – UNB. Brasília. Abenge, 2004.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural: Deformações em Estruturas e Método das Forças**. Porto Alegre: Globo, 1977.

WHITE, R. N., GERGELY, P. e SEXSMITH, R. G. **Structural Engineering – Combined Edition – Vol. 1: Introduction to Design Concepts and Analysis – Vol. 2: Indeterminate Structures**. John Wiley, New York, 1976.