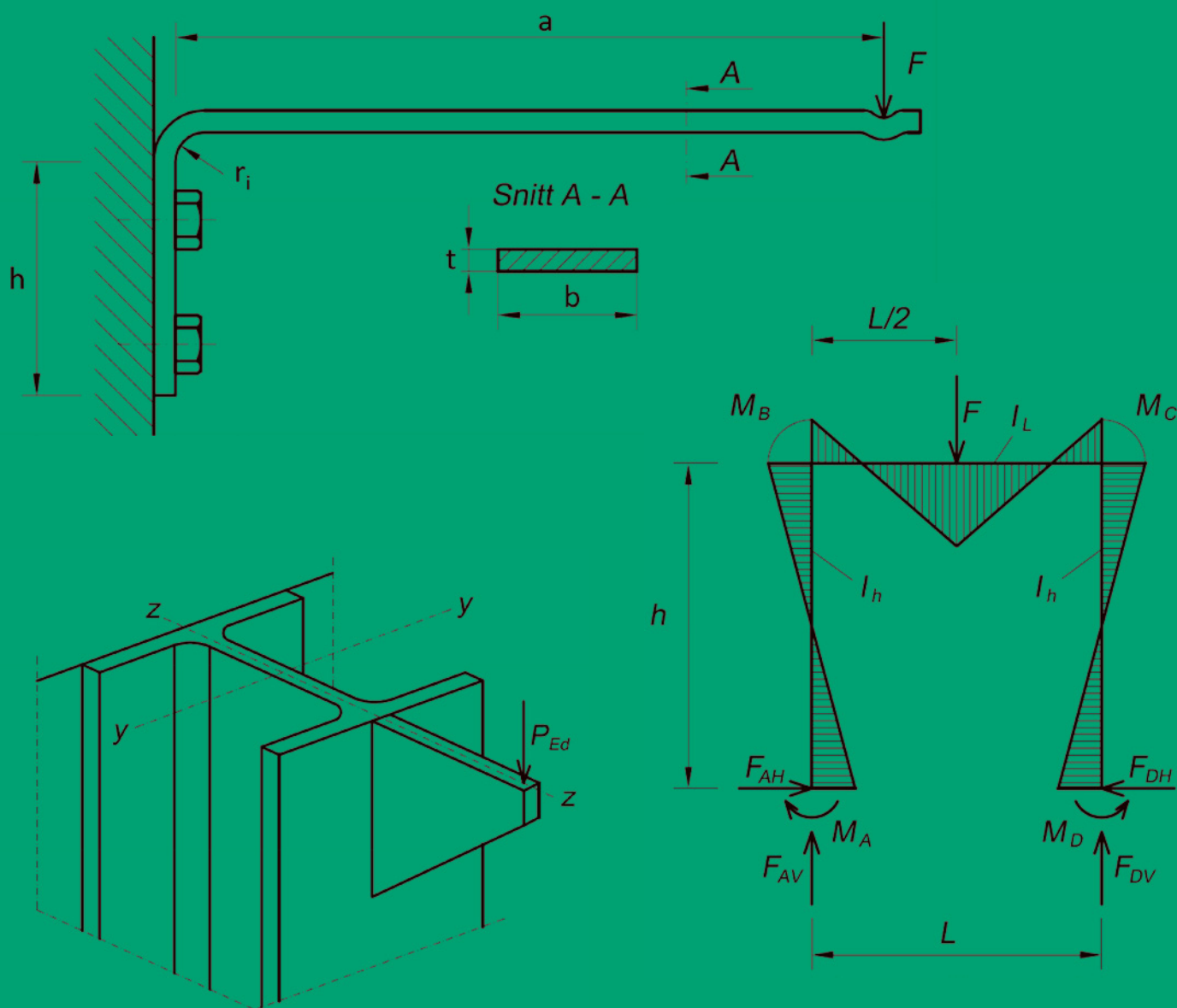


GEIR TERJESEN

DIMENSJONERINGSTEKNIKK FOR INGENIØRER

2. UTGAVE



FAGBOKFORLAGET

DIMENSJONERINGSTEKNIKK FOR INGENIØRER

2. UTGAVE

GEIR TERJESEN

DIMENSJONERINGSTEKNIKK FOR INGENIØRER

2. UTGAVE



FAGBOKFORLAGET

Copyright © 2023 by
Vigmostad & Bjørke AS
All Rights Reserved
ISBN: 978-82-450-4615-1

1. utgave 2021 (trykt)
2. utgave 2023 (e-bok) / 1. versjon 2023

Elektronisk tilrettelegging: John Grieg: Bergen

Forsidedesign ved forlaget
Grafisk formgivning ved forfatteren

Spørsmål om denne boken kan rettes til:
Fagbokforlaget
Kanalveien 51
5068 Bergen
Tlf.: 55 38 88 00
e-post: fagbokforlaget@fagbokforlaget.no
www.fagbokforlaget.no

Materialet er vernet etter åndsverkloven.
Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarframstilling
bare tillatt når det er hjemlet i lov eller avtale med Kopinor.

Vigmostad & Bjørke AS er Miljøfyrtårn-sertifisert.



Forord

Denne boken er skrevet for å dekke en del av hovedfaget i maskindesign ved NMBU.

Den resterende delen av hovedfaget består av utmatting og bruddmekanikk og vil bli dekket av en annen bok som er under utarbeidelse. Boken i dimensjoneringsteknikk tar utgangspunkt i forskjellige temaer som skal gi maskiningeniøren relevant dimensjoneringskunnskap.

I praksis viser det seg at mange studenter også får behov for kunnskap om dimensjoneringsstandarder. Det er derfor gitt en innføring i Eurokode 3 (stålkonstruksjoner), som noen kjente maskintekniske konstruksjonsoppgaver blir løst med.

Studentenes forkunnskaper varierer. Noen emner er derfor repetert for å lette innlæring av nytt fagstoff. Utledninger er i stor grad skilt ut i egne delkapitler for å gjøre beregningsgangen mer oversiktlig. Boken har også en rekke beregningseksempler for å illustrere teorien.

Relevante tabeller over bjelkedata, bjelketabeller, pasninger og normalfordelingen er tatt med i boken slik at behovet for andre oppslagsverk reduseres.

I dag benytter de fleste ingeniører ett elementmetodeprogram (FEM-program) som hjelp ved dimensjonering. Håndberegningsmetodene blir i stor grad brukt for å verifisere om FEM-beregningene er fornuftige. Det er flere typer FEM-programmer, i denne boken er noen verifiseringer gjort med programvare fra Ansys. Her benyttes:

- Ansys® Academic Research Mechanical APDL, Release 2021 R1.
- Ansys® Academic Research Mechanical, Release 2021 R1.

Boken er lagt opp slik at den kan brukes på spesialiserte bachelor-kurs og på masternivå, hvor relevant fagstoff kan velges ut. Boken kan også være nyttig som oppslagsverk for praktiserende ingeniører.

Jeg vil rette en stor takk til ingeniør Tore Ensby, som har laget de fleste tegningene.

Videre vil jeg takke Prof. Arkadi Ponossov, som har bidratt med matematiske utledninger, og Prof. Fridtjov Irgens for faglig inspirasjon og for faglig støtte gjennom mange år.

Fra industrien vil jeg takke ingeniørene Arnt-Henning Andersson fra HBM Norge AS og Carl Odvar Hoel fra Coba Måleteknikk AS for korrektur av kapitlet om strekkklapper.

Sist, men ikke minst vil jeg takke kolleger og studenter på hovedkurset som gjennom årene har kommet med innspill til fagstoffet.

Oslo, juli 2021

Geir Terjesen

Forord til 2. utgave

Siden 1. utgave kom i 2021 har boken vært brukt i undervisningen ved NMBU i to år. I denne perioden er det påvist trykkfeil, noen feil i beregningseksempler, andre feil, uklarheter og mangler. Noen avsnitt er skrevet om og andre feil og mangler er nå etter beste evne rettet opp. Forfatteren retter en takk til studentene i hovedkurset og kolleger som har kommet med innspill.

Det har også kommet til et nytt tema om valg av stålmaterialer og profiler som skal bidra til å gi studentene grunnleggende kunnskaper om material- og profilvalg.

Oslo, juni 2023

Geir Terjesen

INNHold

Innholdsfortegnelse	7
Symboler	15
1. Repetisjon og spenningsanalyse	
1.1 Hensikt og introduksjon	19
1.1.1 Strekkspenning	19
1.1.2 Trykkspenning	21
1.1.3 Spenningskonsentrasjonsfaktorer, K_t	22
1.1.4 Bøyepening	23
1.1.5 Skjærspenning ved avskjæring	25
1.1.6 Vridespenning (torsjonsspenning)	25
1.1.7 Kombinerte spenninger	26
1.1.8 Normalspenning kombinert med skjær eller vridespenning	26
1.1.9 Tillatt spenning og materialdata	26
1.2 Spenningsanalyse	30
1.2.1 En-akset spenning	31
1.2.2 Koordinatspenninger og to-akset spenning (plan spenning)	32
1.2.3 Mohrs spenningssirkel med hovedvekt på plan spenning	37
1.2.4 Brudd- og flytehypoteser	44
1.2.5 Eksempler med Mohrs sirkel, brudd- og flytehypoteser	52
1.2.6 Introduksjon av tre-akset spenning	60
1.3 Valg av stålmaterialer og profiler	63
1.3.1 Legeringselementenes innvirkning og klassifisering av stål	64
1.3.2 Rusttrege og rustfrie stål	68
1.3.3 Noen slitasjebestandige høyfaste stål	74
1.3.4 Stål og høyere temperaturer	75
1.3.5 Stålprodukter og leveringstilstander	76
1.3.6 Material- og profilvalg	78
1.3.7 Noen stålprofil tabeller	80
Varmvalsede HE-A bjelker	81
Varmvalsede HE-B bjelker	82
Varmvalsede IPE-bjelker	83
Varmformede kvadratiske hulprofil	84
Varmformede rektangulære hulprofil	85

	Kaldformede kvadratiske hulprofil	86
	Kaldformede rektangulære hulprofil	87
	Varmformede likebente vinkelprofil	88
	Varmformede ulikebente vinkelprofil	89
	Varmvalsede kanalstål, UNP	90
1.3.8	Standard kumulativ normalfordeling	91
1.4	Referanser	93
2. Trykkbeholdere og estimeringsteknikker		
2.1	Hensikt og introduksjon	94
2.2	Tynnvegget sylindrisk beholder	95
2.3	Tykkvegget sylindrisk beholder	97
2.3.1	Noen utledninger og delvis plastifisert tykkvegget beholder	100
2.4	Tynnvegget kuleskall (kuleformet beholder)	105
2.5	Tykkvegget kuleskall (kuleformet beholder)	105
2.6	Generelle formler for tøyning og spenning	106
2.7	Tøyning av beholdere	106
2.7.1	Kompressibilitetsmodul	109
2.8	Estimering av bøyespenningen i lokk, flenser og stempel	113
2.8.1	Estimering av bøyespenningen i rund flatt lokk	113
2.8.2	Estimering av bøyespenning i firkantet flatt lokk	115
2.8.3	Estimering av bøyespenning i løse flenser eller flenser med gjenger	117
2.8.4	Flenser sveist/støpt til tykke rørdeler eller aksler	118
2.8.5	Estimering av bøyespenning i stempel	120
2.9	Referanser	121
3. Press- og krympeforbindelser		
3.1	Hensikt og introduksjon	122
3.2	Noen fordeler og ulemper med press- og krympeforbindelser	123
3.3	ISO-toleranser	125
3.4	Pasninger	128
3.5	Fremgangsmåte for å dimensjonere påkrympet nav på massiv aksel	132
3.6	Beregning av påkrympet nav på hul aksel	137
3.7	Bakgrunn for formelverk for krympeforbindelser	139

3.7.1	Formelverk for forbindelser uten rotasjon	140
3.7.2	Formelverk for forbindelser med rotasjon	142
3.8	Noen utdrag av ISO-toleranser for ytre mål (for eksempel akslinger)	148
3.9	Noen utdrag av ISO-toleranser for innvendige mål (boringer)	162
3.10	Referanser	174
4. Strekkklapper		
4.1	Hensikt og spenningsberegninger	175
4.2	Bruksprinsipp, begrensninger og kunnskapskilder	175
4.3	Historikk	176
4.4	Fordeler med strekkklapper	177
4.5	Aksial tøyninger	179
4.6	Strekkklapteori	181
4.7	Noen vanlige oppkoplinger med strekkklapper	188
4.8	Øvingsoppgaver	192
4.9	Torsjon (vridning)	193
4.10	Tabell: «Tilfeller» med strekkklapper	195
4.11	Eksempler	197
4.12	Bestemmelse av spenningen på en materialoverflate	199
4.13	Generelt om praktiske forhold ved strekkklappmålinger	203
4.14	Noen utledninger	208
4.14.1	Utledning av forenklet bruformel	208
4.14.2	Sammenheng mellom skjærtøyning (γ) og diagonaltøyning (ϵ_{45°)	210
4.14.3	Sammenhengen mellom skjærmodulen (G) og elastisitetsmodulen (E)	211
4.14.4	Sammenhengen mellom spenning og tøyning for lineært isotropt materiale	212
4.14.5	Utledning av formel for retningsbestemt tøyning	215

4.15	Referanser	216
5. Generelt om deformasjon og differensiallikningen for den elastiske linjen.		
«Den elastiske linjens likning»		
5.1	Hensikt og repetisjon av viktige sammenhenger ved bøyning.	217
5.2	Generelt om deformasjon og FEM verifikasjon	221
5.3	Den elastiske linjens likning	223
5.4	Den elastiske linjen med Macaulay-funksjoner	230
5.5	Store deformasjoner og andre ordens effekt	236
5.6	Noen bjelkeformler	241
5.7	Referanser	245
6. Krumningsflatemetoden		
6.1	Hensikt og introduksjon	246
6.2	Krumningsflatemetoden for utkragerbjelker	246
6.3	Krumningsflatemetoden for fritt opplagt bjelke	252
6.4	Aksler med lastoverheng	256
6.5	Referanser	258
7 Energimetoder		
7.1	Hensikt og introduksjon	259
7.2	Castiglianos sats	259
7.2.1	Generelt og Castiglianos sats ved strekkpåkjenning	260
7.2.2	Castiglianos sats ved bøyepåkjenning	261
7.2.3	Utleddning av Castiglianos teoremer	278
7.2.4	Castiglianos sats med kombinerte belastningstyper	281
7.3	Arbeidsbetraktninger, virtuelt arbeid og enhetslastmetoden.	287
7.4	Gjensidige (resiproke) teoremer	302
7.5	Referanser	307
8. Komposittbjelker, krumme bjelker og rektangulære plater		
8.1	Hensikt	308
8.2	Repetisjon, skjærspenning ved bøyning	308
8.3	Komposittbjelker	319
8.3.1	Utleddning av formelverk for komposittbjelker	324

8.4	Krumme bjelker	330
8.4.1	Utledning av formelverk for krumme bjelker	337
8.5	Bøying av rektangulær plate	340
8.6	Platestripemetoden	344
8.7	Referanser	347
9. Statisk ubestemte bjelker, skrå- og usymmetrisk bøying		
9.1	Hensikt	348
9.2	Statisk ubestemte bjelker	348
9.2.1	Superposisjonsmetoden	349
9.2.2	Deformasjonsmetoder	351
9.2.3	Sammenlikning mellom håndberegninger og Ansys	352
9.2.4	Vinkelendringsmetoden	354
9.3	Tremomentmetoden	360
9.4	Skrå- og usymmetrisk bøying	373
9.5	Referanser	381
10. Plastisitetsteori og bøyepåkjente konstruksjoner		
10.1	Hensikt og introduksjon	382
10.2	Plastisk momentkapasitet	382
10.2.1	Viktige momenter ved dimensjonering	386
10.3	Flyteledd og bruddmekanismer	383
10.3.1	Antagelser ved flyteleddsregninger	387
10.3.2	Beregning av plastisk last for en mekanisme	389
10.3.3	Spesielle forhold	391
10.3.4	Grenseteoremene	393
10.3.5	Oppsummering av fremgangsmåten	396
10.4	Rammer	397
10.5	Effekten av aksiallast på plastisk bøyning	409
10.5.1	Plastisk nøytralakse for noen belastede I-profiler	415
10.6	Effekten av skjærkraft på plastisk bøyning	421
10.7	Plastisk motstandsmoment mot torsjon	423
10.8	Referanser	424
11. Introduksjon til Eurokode 3 (Stålkonstruksjoner)		

11.1	Hensikt og introduksjon	425
11.2	Eurokode 3 og materialer	425
11.3	Dimensjonering i grensetilstander	432
11.4	Plastiske beregninger og klassifisering av tverrsnitt	438
11.5	Partialkoeffisientmetoden, andre standarder og internettressurser	464
11.6	Referanser	465

12. Skrueforbindelser og Eurokode 3

12.1	Introduksjon, klassifisering og bruddformer	466
12.2	Avskjæringsforbindelser	467
12.2.1	Kapasitet mot avskjæring i skruene	467
12.2.2	Kapasitet mot hullkantrykk	469
12.2.3	Blokkutrivning av skruegruppe	471
12.2.4	Brudd i grunnmaterialet	472
12.2.5	Injeksjonsskruer	476
12.2.6	Symmetrisk knuteplate	477
12.2.7	Innfesting av vinkelprofil i ett bein	478
12.3	Momentbelastet grunnmateriale	479
12.4	Skruegrupper og plastisk beregning	479
12.5	Skruer belastet i strekk	481
12.6	Skruer belastet i avskjæring og strekk	482
12.7	Hearmvirkning i T-forbindelser	484
12.8	Bolteleddforbindelser	489
12.9	Friksjonsforbindelser	490
12.10	Noen praktiske tips om skruedimensjonering	493
12.11	Referanser	493

13. Sveiste forbindelser med Eurokode 3

13.1	Hensikt og generelt om lastbærende sveiser	494
13.2	Kapasiteten til buttsveiser	496
13.3	Kapasiteten til kilsveiser	497
13.3.1	Bøyepåkjente sveiseforbindelser	507
13.3.2	Vridepåkjent kilsveis	513
13.3.3	Sveis betraktet som en linje	513
13.4	Utrivningsbrudd (delaminering)	519

13.5	Sveising i kalddeformerte områder	520
13.6	Forbindelser til uavstivet flens	521
13.7	Plastisk dimensjoneringsmetode	523
13.8	Noen utledninger	528
	13.8.1 Utledning av formel for skrå sveis	528
	13.8.2 Utledning av formel for kilsveis på plate med helning	529
	13.8.3 Sammenlikning, fastboltet brakett og sveist brakett	530
13.9	Referanser	532
14. Globale knekkeberegninger uten standard		
14.1	Hensikt og typer av stabilitetsproblemer	533
14.2	Repetisjon om knekking	535
14.3	Knekking av bjelke-søyler	543
	14.3.1 Metode 1: Forenklet interaksjonsregel	543
	14.3.2 Metode 2: Tillatt spenning	547
14.4	Knekkformer	551
14.5	Ansys knekking	552
14.6	Knekkekurver for noen stål- og aluminiumlegeringer	554
14.7	Utledning av noen knekkeitfeller	556
14.8	Utledning av forsterkningsfaktor for sinusformet stav	561
14.9	Noen statisk ubestemte rammer	562
14.10	Referanser	566
15. Knekking av torsjonsstive staver med Eurokode 3		
15.1	Hensikt og introduksjon	567
15.2	Utvikling av knekk kurver	567
15.3	Valg av knekkurve	568
15.4	Knekking ved ren aksiallast	570
15.5	Knekking av bjelke-søyler	571
15.6	Utledning av likning for ekvivalent formfeil	579
15.7	Utledning av knekkeformel for torsjonsstiv bjelkesøyle	582
15.8	Tilnærmet utregning av kritisk knekklast	584
15.9	Referanser	585
16. Torsjon og vippling uten standard		

16.1	Hensikt og repetisjon om torsjon	586
16.2	Statisk ubestemt torsjonsberegning	588
16.3	Forskjellige tverrsnittsformer	591
16.4	Kombinert spenning med bøyning, skjær og torsjon	598
16.5	Sammensatte tverrsnitt	598
16.6	Bi-moment metoden (forenklet torsjonsberegning)	602
16.7	Skjærsenter	603
16.8	Vipping	606
16.8.1	Forenklet vippingskontroll	608
16.9	Noen utledninger og eksempler	612
16.9.1	Forenklet utledning av Bredts 1.formel	612
16.9.2	Utledning av Bredts formler med eksempler	613
16.9.3	Utledning av skjærsenter for U-profil	616
16.10	Referanser	618
17. Vipping og bøyetorsjonsknekking (vippingsknekking) med eurokode 3		
17.1	Hensikt og introduksjon	619
17.2	Alternativ 1, vippekurver for generelle tilfeller	620
17.3	Alternativ 2, valsede I-profiler og tilsvarende sveiste profiler	621
17.4	Alternativ 3, forenklet vurdering av sideveis fastholde bjelker i bygninger	622
17.5	Kritisk vippemoment	623
17.6	Eksempel vipping	625
17.7	Bøyetorsjonsknekking etter Eurokode 3	628
17.7.1	Eksempel bøyetorsjonsknekking	631
17.8	Effekten av vertikalstivere	635
17.9	Referanser	635
18. Platebærere og stivere		
18.1	Hensikt og introduksjon	636
18.2	Dimensjonering av dobbeltsymmetrisk platebærer etter Eurokode 3	639
18.2.1	Dimensjonering av tverrstivere	641
18.3	Punktlaster på bjelkens flens	649
18.4	Referanser	656

Symboler

Det er en stor mengde symboler i dimensjoneringsteknikken. Symbolene som benyttes i forbindelse med dimensjonering uten standard er nok kjent for de fleste. Symbolverket til Eurokode 3 er omfattende. Det anbefales å studere anbefalte linker og referanser i kap.11.5 for å bli bedre kjent med Eurokode 3-symbolene.

Symbolene blir forklart når de først forekommer i teksten. De fleste symbolene er likevel tatt med her. Uansett om man dimensjonerer med eller uten standard oppdager man at ett symbol kan ha flere betydninger og at en bestemt størrelse kan benevnes på flere måter. Dette vil man også kunne se av listen med symboler.

A	tverrsnittsareal
A_b	brutto tverrsnittsareal
$A(\%)$	bruddforlengelse i prosent
A_{eff}	effektivt tverrsnittsareal
$A_{eff,st}$	effektivt tverrsnittsareal for stivere
A_f	flensareal
A_m	areal omsluttet av tverrsnittets senterlinje
A_{net}	netto tverrsnittsareal
A_s	spenningsareal av skruer
A_{st}	bruttotverrsnitt av én tverrstiver
A_V	skjærareal
A_w	stegareal
C_m	ekvivalent momentfaktor
C_w	hvelvningskonstant
D	platestivhet
E	elastisitetsmodul
E_d	dimensjonerende lastvirkning (kraft eller moment)
ES, EI	øvre og nedre avvik for boring (innvendige mål)
F, F_p	kraft eller ytre last, bruddkraft (plastisk) verdi av kraft
F_E	Eulers knekklast
F_{Ed}	dimensjonerende lastvirkning
F_k	karakteristisk verdi av variabel last
$F_{b,Rd}$	dimensjonerende hullkantkapasitet per skrue
$F_{p,C}$	forspenningskraft i skrue
$F_{s,Rd}$	dimensjonerende friksjonskapasitet per skrue
$F_{t,Rd}$	dimensjonerende strekkapasitet per skrue
$F_{v,Rd}$	dimensjonerende avskjæringskapasitet per skrue
$F_{w,Rd}$	akseparallel skjærkraft i kilsveis
F_T	kraft i T-stykke
G	skjærmodul
G_k	karakteristisk verdi av permanent last
GT	grunntoleranse
I_i, I_{ij}	annet arealmoment og sentrifugalmoment avhengig av akser
I_p, I_b, I_T	polart annet arealmoment, St. Venants torsjonskonstant (torsjonstregghetsmomentet)
I_w	hvelvningskonstant
K	kraft eller akseparallel skjærkraft
K_t	spenningskonsentrasjonsfaktor
K_v, K_g	kompressibilitetsmodul for væske og gass
K_b, K_v^*, K_R	kompressibilitetsmodulen for beholder, væske med innblandet gass og resulterende kompressibilitetsmodul
KV	slagseighet

L	lengde
L_0	utgangslengde
L_u	målelengden etter brudd.
ΔL	absolutt forlengelse
L_k, L_{cr}	kritisk knekk lengde
M	moment
M_b	bøyemoment
M_{Ed}	dimensjonerende moment.
$M_{b,Rd}$	dimensjonerende vippekapasitet
M_{cr}	kritisk moment for vipping
M_{el}	elastisk momentkapasitet
M_p	plastisk momentkapasitet
M_{pl}	dimensjonerende plastisk momentkapasitet
$M_{c,Rd}$	dimensjonerende momentkapasitet
$M_{N,Rd}$	dimensjonerende momentkapasitet redusert av aksialkraft N
$M_{V,Rd}$	dimensjonerende momentkapasitet redusert av skjærkraft V
M_t	torsjonsmoment (vridemoment)
M_x, M_y, M_z	momenter om x -, y - og z -akse
ΔM	tillæggsmoment på grunn av forskyvning av arealsenter
N	kraft
N_{st}	total aksialkraft i stiver
ΔN_{st}	ekvivalent aksialkraft i stiver pga formavvik
$N_{st,ten}$	aksialkraft pga strekkfeltvirkningen i steget
N_f	flenskraft
N_{Ed}	dimensjonerende aksialkraft
$N_{b,Rd}$	dimensjonerende kapasitet i bøyeknekkning
$N_{c,Rd}$	dimensjonerende aksialkraftkapasitet i trykk
$N_{cr,i}$	kritisk kraft for bøyingsknekkning (Eulerlast) avhengig av akse
$N_{t,Rd}$	dimensjonerende aksialkraftkapasitet i strekk
$N_{u,Rd}$	dimensjonerende aksialkraftkapasitet i nettotverrsnitt
P	last (kraft)
P_k	karakteristisk verdi av variabel last
R	radius eller resistans
$R_1, R_2 \dots$	nummer på resistanser, brukes også i krumningsflatemetoden
ΔR	endring i resistans
R_a	midlere profilhøyde for overflateruheten
R_{eH}	øvre flytegrense, benevnes i dimensjoneringssammenheng vanligvis bare for flytegrensen, R_e .
R_m	Strekkfasthet, bruddspenning
$R_{p0,2}$	flytegrense for materialer uten flyteplata
S	skjærsenter
S_i	statisk moment (første arealmoment) om <i>aktuell akse</i>
T_a, T_b	toleranseområde for aksel og boring
U	tøyningsenergi
U_0, U_E	utgangs- og matespenning
V	skjærkraft, volum
$V_{b,Rd}$	platebærers totale skjærkapasitet
$V_{bw,Rd}$	stegets skjærkapasitet
$V_{bf,Rd}$	flensens bidrag til skjærkapasiteten
$V_{c,Rd}$	dimensjonerende kapasitet i skjær
V_{Ed}	dimensjonerende skjærkraft (snittkraft)
$V_{pl,Rd}$	plastisk kapasitet i skjær
$V_{T,Rd}$	dimensjonerende skjærkraftkapasitet redusert pga samtidig torsjonsmoment
$V_{y,Ed}, V_{z,Ed}$	dimensjonerende skjærkraft i y - og z -retning

$W_{el,i}, W_{pl,i}$	elastisk og plastisk tverrsnittsmodul (motstandsmoment) om aktuell akse
W_i, W_y	indre arbeid, ytre arbeid
a	lengde mål
b	bredde mål
b_f	flensbredde
b_{eff}	effektiv bredde
d	diameter og skrueskaftdiameter
Δd	økning av diameter eller diagonal mål
$d_{a,maks}$	øvre grensemål for aksel
$d_{a,min}$	nedre grensemål for aksel
$d_{a,nom}$	nominelt mål (kalles også basismål) for aksel
$d_{b,maks}$	øvre grensemål for boring
$d_{b,min}$	nedre grensemål for boring
$d_{b,nom}$	nominelt mål (kalles også basismål) for boring
d_0	diameter for hull til skrue
e	eksentrisitet, avstander
e_1	endeavstand i kraftretning, målt fra skruehullets senter til stavende
e_2	kantavstand normalt på kraftretningen målt fra skruehullets senter
$e_{i,j}$	forskjellige typer utbøyningsamplituder avhengig av indekser
es, ei	øvre og nedre avvik for aksel (utvendige mål)
f_k	knekkspenning, karakteristisk fasthet
f_{Rd}	dimensjonerende fasthet eller kapasitet
f_y	flytespenning, flytegrense
f_{yf}	flensens flytegrense
f_{yw}	stegets flytegrense
f_u	bruddspenning, strekkfasthet
h, h_w	tverrsnittshøyde, avstand, steghøyde mellom flensene
h_f	avstanden mellom flensenes arealsentere
i, i_y, i_z	arealtrehetsradius, arealtrehetsradius om y- og z-aksen
k	knekkklengdefaktor eller strekkklappfaktor
k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}	interaksjonsfaktorer for bjelke-søyler
k_{zz}	interaksjonsfaktor for bjelke-søyler
k_w	stivhet av elastisk underlag
k_x, k_ϕ	translasjonsstivhet, rotasjonsstivhet
$k_\sigma, k_b, k_\tau, k_F$	knekkingskoeffisienter
l, l_y, l_e	lengde og spennvidde, effektiv lastlengde for punktlast, parameter for punktlast
l_{eff}	effektiv lengde (av T-stykke)
m_1, m_2	hjelpetørrelser (punktlast på bjelker)
p	trykkspenning, hullavstand
p_i, p_y	indre og ytre trykk
q	fordelt last, skjærspenningsstrøm
s	hullavstand ved forskjøvet hullplassering
s_o	tykkelse ubelastet
r	radius
r_i, r_y, r_m	indre-, ytre- og midlere radius
r_n	radius til nøytralakse (krumme bjelker)
r_o	ytre radius (krumme bjelker)
t	tykkelse, tid
t_f	flenstykkelse
t_w	stegtykkelse
u	deformasjon
w_0	initialutbøying
Δw	tilleggsdeformasjon
x, y, z	koordinater
y	deformasjon

α	temperaturutvidelseskoeffisient, knekkurveparameter, lengdeforhold i plate, vinkel, faktor for å finne plastisk nøytralakse, plastisitetfaktor.
α_b, α_d	koeffisienter for bestemmelse av skrukapasitet
α_a, α_n	influenskoeffisienter
β	knekk lengdefaktor, skjærfaktor, reduksjonsfaktor
β_w	korrelasjonsfaktor for sveis
γ	skjærtøyning
γ_F	lastkoeffisient
$\gamma_{M0}, \gamma_{M1}, \gamma_{M2}$	materialfaktorer
δ	deformasjon, pressmonn
$\delta_{eff}, \delta_{mid}$	effektivt og midlere pressmonn
$\delta_{t,max}, \delta_{t,min}$	største og minste teoretiske pressmonn
ε	relativ forlengelse, tøyning eller faktor som avhenger av f_y
$\varepsilon_b, \varepsilon_F$	tøyning fra bøyning, tøyning fra normalkraft, F
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	tøyning i respektive retninger
ε_y	flytetøyning eller tøyning i y-retning
ε_u	bruddtøyning
ζ	hovedakse
η	hovedakse eller korreksjonsfaktor
θ	vinkel
θ_t	torsjonsvinkel
κ	krumning
λ	slankhet
λ_1	flyteslankhet
$\bar{\lambda}$	relativ slankhet for bøyingsknekking
$\bar{\lambda}_T$	relativ slankhet for torsjons- eller bøyetorsjonsknekking
$\bar{\lambda}_{LT}$	relativ slankhet for vipping
$\bar{\lambda}_p, \lambda_p$	relativ plateslankhet, plateslankhet
$\bar{\lambda}_w$	stegets relative slankhet
μ	friksjonskoeffisient eller Jouravskifaktoren (skjærpåkjent bjelke)
ν	Poissons tall (tverrkontraksjonstall)
ρ, ρ_c	massetetthet, reduksjonsfaktor for plateknekking, og for platefeltknekking
σ	normalspenning
σ_a	aksial spenning
σ_b	bøyespenning
σ_e, σ_{jf}	ekvivalent eller jevnførende spenning (betyr det samme)
σ_k	knekkspenning
σ_r	radial spenning
σ_t	tangential spenning
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	normalspenning i x-, y- og z-retning
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	første, andre og tredje hovedspenning
τ	skjærspenning
φ	vinkel
χ, χ_w, χ_{LT}	reduksjonsfaktor for bøyeknekking, skjærknekking og vipping
ψ	spenningsforhold eller forhold mellom endemomenter
ω	vinkelhastighet

1. REPETISJON OG SPENNINGSANALYSE

1.1 Hensikt og introduksjon

Hensikten med dette kapittelet er å:

- repetere noen vanlige spenningstyper, materialdata og materiallære
- kunne benytte Mohrs spenningssirkel for å fastlegge hovedspenninger og tilhørende hovedspenningsretninger i en maskindel
- kunne bruke noen vanlige brudd- og flytehypoteser ved dimensjonering

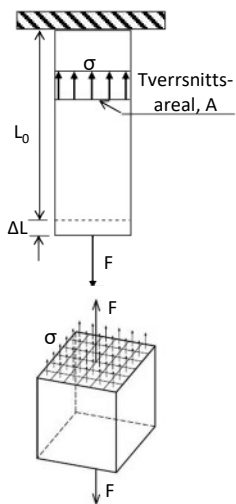
Hovedfokuset i denne boken er stålkonstruksjoner. Stålkonstruksjoner kan dimensjoneres mot flyting, brudd, instabilitet, elastiske deformasjoner, utmatting, korrosjon, egenfrekvenser og sving. Egenfrekvenser, sving og utmatting blir ikke gjennomgått i denne boken. For å kunne dimensjonere en konstruksjon må vi kunne finne belastningene og spenningene konstruksjonen blir utsatt for. Videre må vi vite hvor store spenningene og deformasjonene (kap. 5–7) kan være, altså dimensjoneringskriteriene. Vi skal repetere noen sentrale temaer fra fasthetslæren, før nytt stoff presenteres. Først repeteres noen vanlige spenningstyper, deretter skal vi få en oversikt over de vanligste dimensjoneringskriteriene og materialdata.

1.1.1 Strekkspenning

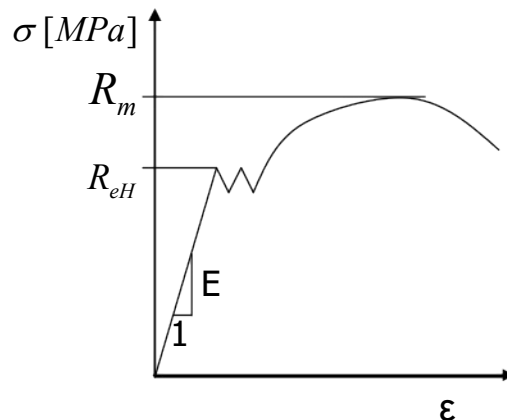
En prøvestav med tverrsnitt $A(\text{mm}^2)$ er belastet med en sentrisk kraft $F(\text{N})$.

Strekkspenningen er kraft (N) per kvadrat millimeter (mm^2). Strekkspenningen i staven er:

$$\sigma = F/A, \quad (\text{N}/\text{mm}^2 = \text{MPa})$$



Figur 1.1



Figur 1.2

I et strekkprøveapparat måler vi forlengelsen av en standard prøvestav etter hvert som strekkraften øker. Figur 1.1 viser prinsippet, og figur 1.2 viser spennings-tøyningskurven til et typisk konstruksjonsstål. Her er:

ΔL (mm): stavens forlengelse i måleområdet

ε : relativ forlengelse (kalles også nominell tøying), $\varepsilon = \Delta L/L_0$, L_0 : Utgangslengde

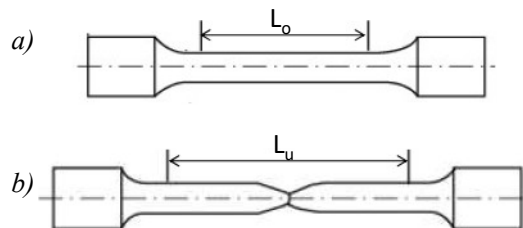
I det rettlinjede område på kurven gjelder Hooke's lov, $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (MPa)

R_m : Strekkfasthet (MPa), benevnes også σ_B og f_u

R_{eH} : Øvre flytegrense (MPa), benevnes i dimensjoneringsammenheng vanligvis bare for flytegrensen, R_e , σ_F , $R_{p0,2}$ og f_y er andre benevnelser på flytegrensen.

E : Elastisitetsmodul (MPa), stigningstallet til spenningen i spennings-tøyningskurven.

Fra materiallæren vet vi at fasthetsverdiene for et gitt konstruksjonsstål avhenger av temperaturen, belastningshastigheten og tykkelsen. Duktile materialer deformeres når de belastes til brudd. Prøvestaven forlenges (bruddforlengelse), og staven vil også få en redusert diameter (kontraksjon) ved brudd. Dette er generelt fordelaktige egenskaper fordi vi ønsker å få et forvarsel på brudd. Målet L_0 , er vanligvis 5 ganger utgangsdiameteren for sylindriske staver, og denne lengden merkes på staven. Etter brudd legges bitene sammen og man måler den prosentvise bruddforlengelsen. Dimensjoneringsstandardene kan stille krav til minimum bruddforlengelse.



Figur 1.3 a) Prøvestav før belastning

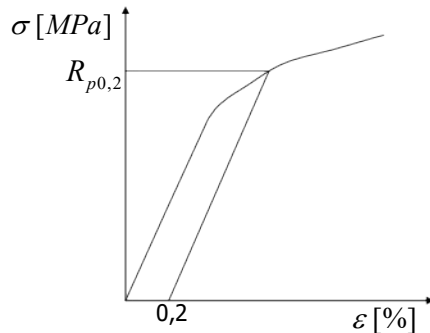
b) Prøvestav etter brudd

L_u , er altså målelengden etter brudd. Bruddforlengelsen er målestavens prosentvise forlengelse etter brudd. Bruddforlengelsen, $A(\%)$, er gitt av formelen:

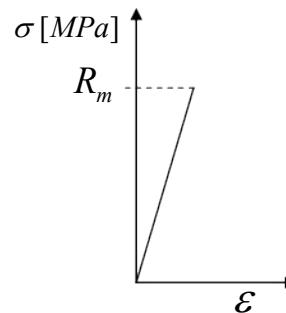
$$A(\%) = \frac{(L_u - L_0)}{L_0} \cdot 100$$

Regelverket for strekkprøving finner du i standarden NS-EN ISO 6892-1: 2019 [1.1].

Noen stållegeringer og andre materialer (for eksempel aluminium) har ikke noen karakteristisk flytegrense som vist på figur 1.4. I slike tilfeller benyttes 0,2 %-metoden for å finne flytegrensen.



Figur 1.4

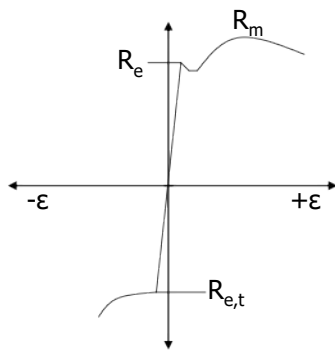


Figur 1.5

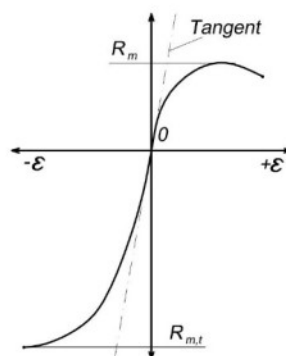
Ved 0,2 % tøyning på ϵ -aksen, trekkes en linje parallell med spennings-tøyningskurven. Punktet hvor denne linjen krysser spennings-tøyningskurven defineres som flytegrensen. Se figur 1.4. Materialer som viser liten eller ingen deformasjon før brudd, blir omtalt som sprø materialer, f.eks. noen herdede stållegeringer og grått støpejern. Sprø materialer har ingen karakteristisk flytegrense. Se figur 1.5.

1.1.2 Trykkspenning

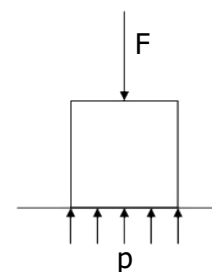
Konstruksjonsstål har relativt like fasthetsegenskaper ved trykk som i strekk frem til flytegrensen, se figur 1.6. Når det gjelder grått støpejern, har heller ikke dette materialet noen karakteristisk flytegrense. Elastisitetsmodulen er gitt som tangenten som berører kurven gjennom origo. Grått støpejern er sterkere ved sammentrykning fordi den laminerte grafitten fungerer som støddemper ved sammentrykning. Se figur 1.7.



Figur 1.6



Figur 1.7



Figur 1.8

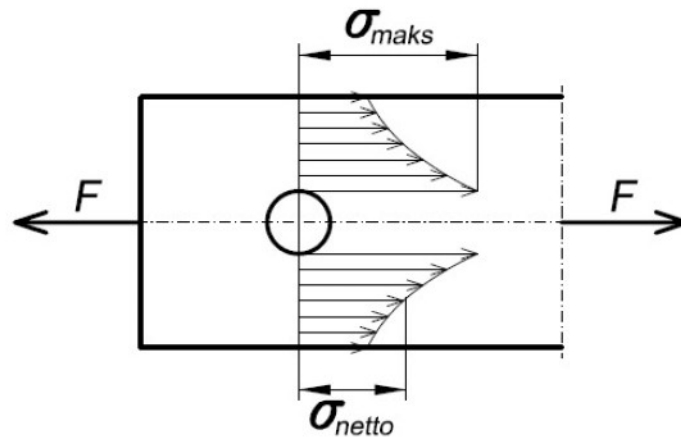
Trykkspenningen kan skrives: $p = F/A$ (MPa), A: Tverrsnittsarealet til delen.

Når lengden (slankheten) til den trykkpåkjente delen blir stor nok, må vi også dimensjonere mot knekking. Dette kommer vi tilbake til i senere kapitler.

1.1.3 Spenningskonsentrasjonsfaktorer, K_t

Forholdet mellom maksimalspenning og nominell nettospenning i en komponent benevnes spenningskonsentrasjonsfaktoren, K_t . Noen viktige momenter om K_t :

- K_t er uavhengig av materialtypen, og avhenger bare av geometrien (kjervens utforming).
- Ved statisk dimensjonering må K_t brukes på sprø* materialer. For duktile materialer er det ikke nødvendig å bruke K_t ved statisk dimensjonering.
- Ved utmattingsberegninger bør K_t brukes på alle typer materialer.



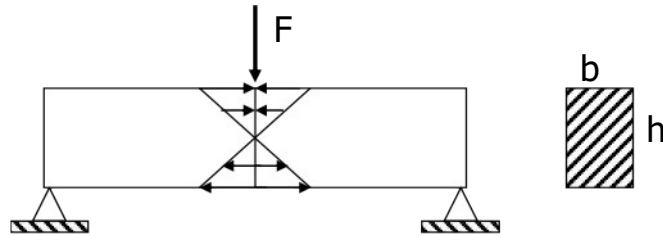
Figur 1.9

$$K_t = \frac{\sigma_{maks}}{\sigma_{netto}} \quad \sigma_{netto} = \frac{F}{A_{netto}} \quad \sigma_{maks} = K_t \cdot \sigma_{netto}$$

*For noen sprø materialer i strekk vil tilstedeværelse av materialfeil, urenheter eller grafittflak (for eksempel støpejern) forårsake indre spenningskonsentrasjoner. Denne spenningsøkningen kan være større enn hva andre spenningskonsentrasjoner kan forårsake, for eksempel ved et boret hull. Et boret hull i en strekkpåkjent komponent av støpejern kan altså få brudd et annet sted enn ved hullet. Fagfeltet som omfatter bruddfarer for indre eller ytre sprekkliknende defekter, benevnes bruddmekanikk.

1.1.4 Bøyespenning

En rektangulær bjelke med tverrsnitt som angitt på figur 1.10 er belastet med en kraft F på midten. Bøyemomentet skaper trykkspenning i øvre del av bjelken og strekkspenning i nedre del av bjelken. Se figur 1.10.



Figur 1.10

Bøyespenningen kan skrives:

$$\sigma_b = \pm \frac{M_b}{W_b} = \pm \frac{M_b \cdot y}{I}$$

σ_b : Bøyespenning (MPa)

M_b : Bøyemoment (Nmm)

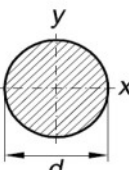
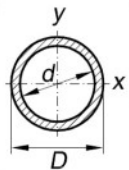
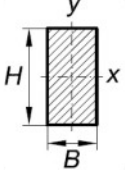
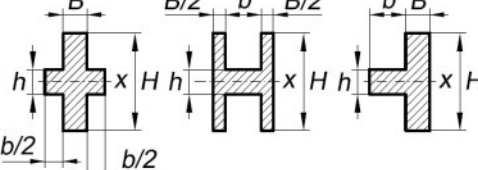
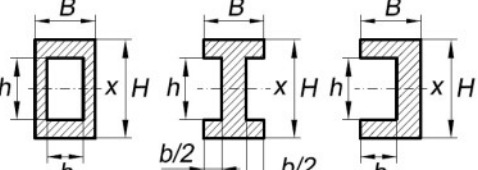
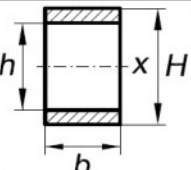
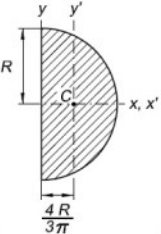
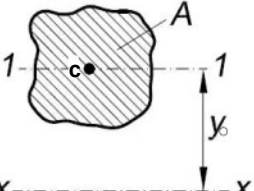
W_b : Elastisk tverrsnittsmodul (benevnes også motstandsmoment) [mm^3]

I : Annet arealmoment for tverrsnittsflaten [mm^4]

y : Avstand fra nøytralaksen til det punkt hvor vi ønsker å fastlegge spenningen [mm].

For dobbeltsymmetriske bjelker utsatt for bøyning er maksimal trykkspenning og maksimal strekkspenning like store, dette er underforstått når $\pm$ -symbolet utelates. Tabell 1.1 viser formel for tverrsnittsmoduler og annet arealmoment for noen vanlige tverrsnitt. Her er også formelen som angir Steiners sats presentert. Når vi ikke har dobbeltsymmetriske tverrsnitt må vi først finne tverrsnittets tyngdepunkt og deretter finne annet arealmoment med Steiners sats (vanlig fasthetslære).

I kapittel 1.3.7 vises tabeller for annet arealmoment, tverrsnittsmoduler og andre tverrsnittsstørrelser for noen bjelketyper.

	Annet arealmoment	Tverrsnittsmodul
	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D}$
	$I_x = \frac{BH^3}{12}$ $I_y = \frac{HB^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^2}{6}$ $W_y = \frac{HB^2}{6}$
	$I_x = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$
	$I_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$I_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$	$W_x = \frac{b}{6H} (H^3 - h^3)$
	$I_x = I_{x'} = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{y'} = R^4 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$ c: flatens tyngdepunkt	
	Steiners sats: $I_x = I_1 + A \cdot y_0^2$	

Tabell 1.1 Annet arealmoment og tverrsnittsmodul for noen tverrsnitt.

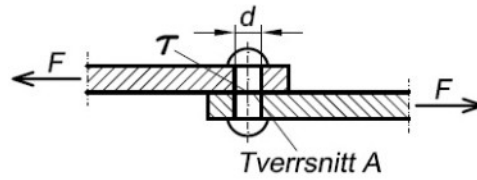
1.1.5 Skjærspenning ved avskjæring

Et nagletverrsnitt med diameter d (mm) er belastet med en tverrkraft F (N), se figur 1.11.

Skjærspenningen i tverrsnittet er:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \text{ (MPa)}$$

Bøying kan også skape skjærspenning, dette kommer vi tilbake til i et senere kapitel.



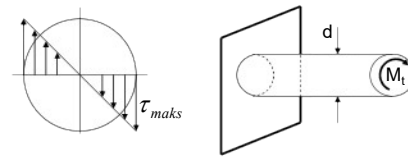
Figur 1.11

1.1.6 Vridespennning (torsjonsspenning)

En sirkulær stav med diameter d (mm) er belastet med et vrimoment (torsjonsmoment)

M_t (Nmm). Vridningsspenningen i staven er:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t \cdot r}{I_p} \text{ (MPa)}$$



Figur 1.12

τ : Vridespennning (MPa)

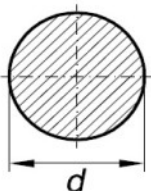
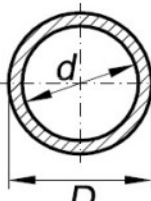
M_t : Torsjonsmoment (Nmm)

W_p : Polar tverrsnittsmodul (mm^3). Benevnes også ”Motstandsmoment mot vridning, W_v ”.

I_p : Polart annet arealmoment for tverrsnittsflaten (mm^4)

r : Avstand fra senter til det punkt hvor vi ønsker å fastlegge spenningen (mm).

Tabell 1.2 viser formler for den polare tverrsnittsmodulen og polart annet arealmoment for sirkulære tverrsnitt. Her er x-aksen horisontal og y-aksen er vertikal gjennom sirkelsenter.

	Polart annet arealmoment	Polar tverrsnittsmodul
	$I_{p,x} = I_{p,y} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_{p,x} = W_{p,y} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$I_{p,x} = I_{p,y} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$	$W_{p,x} = W_{p,y} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$
Sammenheng mellom annet arealmoment ved vridning og bøying: $I_p = I_x + I_y$		

Tabell 1.2 Polart annet arealmoment og polar tverrsnittsmodul mot vridning.

1.1.7 Kombinerte spenninger

Summering av normalspenninger, for eksempel strekk- og bøyespenning:

Figur 1.13 viser en bjelke utsatt for to krefter som er fast innspent i den ene enden.

De samlede normalspenninger på tverrsnittet blir den algebraiske sum av spenninger.

Vi må definere en positiv retning. Strekkspenningsretningen velges som positiv, og formel for motstandmomentet finner vi i tabell 1.1.

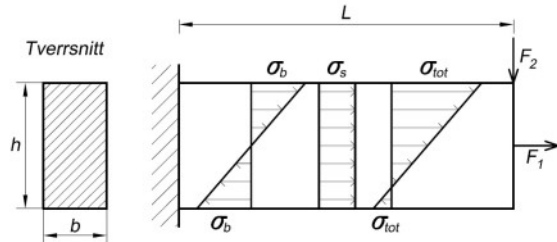
$$\sigma = \sigma_s \pm \sigma_b = \frac{F}{A} \pm \frac{M_b}{W} = \frac{F_1}{A} \pm \frac{F_2 \cdot L}{bh^2/6}$$

Oversiden:

$$\sigma_{o,tot} = \sigma_s + \sigma_{bs}$$

Undersiden:

$$\sigma_{u,tot} = \sigma_s - \sigma_{bt}$$



Figur 1.13

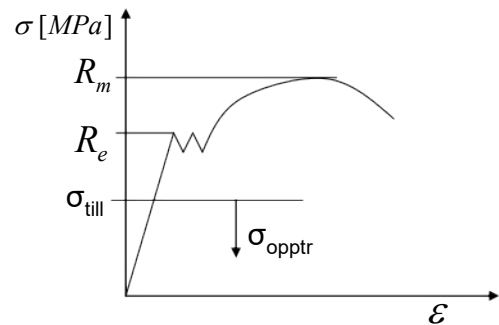
1.1.8 Normalspenning kombinert med skjær eller vridespenning

Det er mest vanlig å sette sammen spenningene etter von Mises eller Trescas hypoteser.

Von Mises hypotese gir best resultater på duktile materialer (for eksempel aluminium og konstruksjonsstål). Trescas hypotese blir brukt på mer sprø materialer (for eksempel støpejern). Spenningen man får (σ_e) kalles den ekvivalente spenningen eller jevnføringsspenning (σ_{jf}).

$$\sigma_e = \sigma_{jf} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (\text{von Mises})$$

$$\sigma_e = \sigma_{jf} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (\text{Tresca})$$



Figur 1.14

1.1.9 Tillatt spenning og materialdata

Tillatt spenning er definert som:

$$\sigma_{till} = \frac{R_e}{n_F} \quad \text{eller} \quad \sigma_{till} = \frac{R_m}{n_B}$$

Her er n_F og n_B sikkerhetsfaktor mot henholdsvis flyting og brudd. Vanligvis blir sikkerhetsfaktor mot flyting brukt på duktile materialer, for eksempel konstruksjonsstål. Sikkerhetsfaktor mot brudd er blitt brukt på materialer som ikke har noen utpreget flytegrense, for eksempel noen høyste stål. Dimensjoneringskravet er at opptredende spenning (σ_{opptr}) må være mindre eller lik tillatt spenning (σ_{till}): $\sigma_{opptr} \leq \sigma_{till}$. Sikkerhetsfaktorene avhenger av usikkerhetsmomenter som: materialdatavariasjoner, dimensjonsfeil, konsekvenser ved brudd, feil i lastantagelser, tilnærmede dimensjoneringshypoteser og miljøet konstruksjonen opererer i. Sikkerhetsfaktorene er i et stort spenn, men verdier kan

ligge i intervallene: $n_F = 1,5$ til $3,0$ og $n_B = 2,0$ til 10 . I mange tilfeller dimensjonerer vi etter standarder hvor sikkerhetsfaktorene er gitt. Sikkerhetsfaktorene skal ivareta: materialfeil og variasjon i materialdata, bruddkonsekvenser, feil i belastningsantagelser, feil i beregningshypoteser. Det defineres også en tillatt skjærspenning. Tillatt skjærspenning kan finnes ved enten å bruke von Mises hypotese eller Trescas hypotese. Von Mises blir vanligvis brukt på relativt duktile materialer og Trescas hypotese på mer sprø materialer. Vi setter den jevnførende spenningen lik den tillatte spenningen i hypotesene.

$$\text{von Mises: } \sigma_{iill} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau_{iill}^2} \Rightarrow \tau_{iill} = \frac{\sigma_{iill}}{\sqrt{3}} \approx 0,6 \cdot \sigma_{iill}$$

$$\text{Tresca: } \sigma_{iill} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau_{iill}^2} \Rightarrow \tau_{iill} = \frac{\sigma_{iill}}{2} = 0,5 \cdot \sigma_{iill}$$

Tabell 1.3 viser strekkfasthet og flytegrense til noen sveisbare konstruksjonsstål.

NS-EN 10025-2	Tyskland DIN 17100	Strekkfasthet R_m [MPa]	Flytegrense R_e [MPa]	Kommentarer
S185	St 33-1	323	185	Utettet
S235JR	RSt 37-2	360	235	Halvtettet
S235 JO	St37-3U	360	235	Halvtettet
S235J2+N	St 37-3N	360	235	Tettet og normalisert
S275JR	St 44-2	430	275	Halvtettet
S275JO	St 44-3U	430	275	Halvtettet
S275J2+N	St 44-3N	430	275	Tettet og normalisert
S355J0	St 52-3U	510	355	Varmformet
S355J2+N	St 52-3N	510	355	Tettet og normalisert

Tabell 1.3

I dag skal en benytte Europeisk standard NS EN 10025-2 (kolonnen til venstre). Standarden kommer fra tid til annen med reviderte versjoner, sørg for at du har den gjeldende standarden, se [1.2]. S-en betyr konstruksjonsstål (Structural steel), de tre neste tallene angir flytegrensen, de to neste bokstavene angir krav til slagseighet, og den siste bokstaven angir leveringstilstand avhengig av produkt.

NS-EN 10025-2	Tyskland DIN17100	Strekkfasthet, R_m [MPa]	Flytegrense, R_e [MPa]
E295	St 50-2	490	295
E335	St 60-2	588	335
E360	St 70-2	686	360

Tabell 1.4

Tabell 1.4 vises fasthetsverdiene til noen stål som ikke er beregnet på sveising.

E-en betyr maskinstål (Engineering steels), de tre neste tallene angir flytegrensen.

Maskinstål har relativt høyt karboninnhold og brukes blant annet i maskindeler.

De tyske betegnelsene er basert på strekkfasthet i kp/mm^2 ($1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$, utgått).

Dette var tidligere vanlige betegnelser i Norge også.

Husk at flytegrensen også er avhengig av belastningshastighet, temperatur og tykkelse.

Dersom tykkelsen overskrider 40 mm må flytegrensen reduseres ytterligere i henhold til Eurokode 3. NS EN 10025-2 angir også flytegrense og strekkfasthet i bestemte intervaller avhengig av tykkelse. For å kunne gjøre fornuftige materialvalg kreves det materialkunnskap utover kjennskap til flytegrense og strekkfasthet. Den grunnleggende materialkunnskapen er gitt i faget materiallære, hvor blant annet bruddforlengelse, slagseighet og leveringsformer blir gjennomgått. I tabellene 1.3 og 1.4 kan vi likevel si at «materialkvaliteten» øker jo lenger nedover vi kommer i tabellene. Det er fornuftig å repetere viktige tema som herding og anløping av stål. Du finner mye informasjon på nettet, for eksempel <https://snl.no/stål> Kap. 1.3 gir mer informasjon om ståltypen og profiler brukt i lastbærende konstruksjoner. I kapitlene om Eurokode 3 i denne boken blir også noen temaer fra materiallæren repetert.

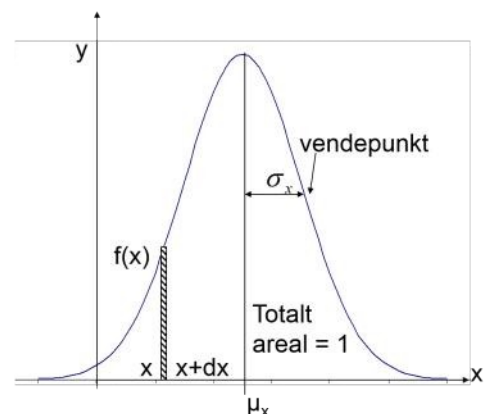
I praksis så varierer både strekkfasthet og flytegrense innenfor et visst intervall.

I bruddgrensetilstanden (eng. Ultimate Limit State) er materialdata for strekkfasthet og flytegrense sentrale størrelser. Ved testing av prøvestaver oppdager vi at det er en variasjon i testresultatene. For å kunne angi en verdi som med stor sannsynlighet vil ligge på konservativ (trygg) side benyttes statistikk. Vi begynner med å repetere litt om normalfordelingen før vi ser på et eksempel der vi blant annet fastlegger flytegrense ut fra statistiske data.

Normalfordelingen

Dersom en tilfeldig variabel, "x", tilhører en normalfordeling med middelværdi μ_x og standardavvik, σ_x , blir den benevnt som* $N(\mu_x, \sigma_x)$. $f(x)$ angir y-verdien til funksjonen ved "x". $f(x) \cdot dx$ er sannsynligheten for at et utfall skjer fra "x" til "x+dx" (det skraverte arealet). Det totale arealet under kurven må være 1, et krav for å være en sannsynlighetsfordeling.

Sannsynlighets- tetthetsfunksjonen:
$$f(x) = \frac{e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right]}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}$$



Figur 1.15

*Selve skrivemåten og symboler kan variere, avhengig av hvilken litteratur du benytter.

Standard kumulativ normalfordeling:

Fordelingen blir ofte standardisert med transformasjonen:

$$u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}, \quad \mu_u = 0 \quad \text{og} \quad \sigma_u = 1$$

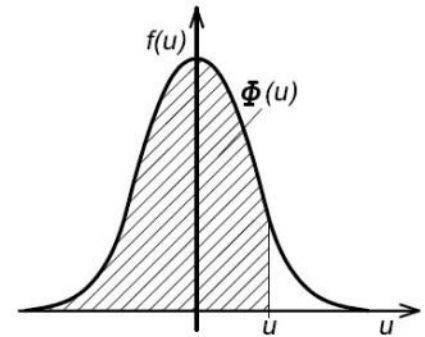
$$f(u) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Φ : Kumulativ fordelingsfunksjon til standardnormalfordelingen.

$\Phi(u)$: Sannsynligheten for at et utfall skal skje mellom $-\infty$ og u .

Verdier av $\Phi(u)$ finner vi i tabellen i kap. 1.3.8.

Et par spesielle verdier: $\Phi(+\infty) = 1$ og $\Phi(0) = 0,5$



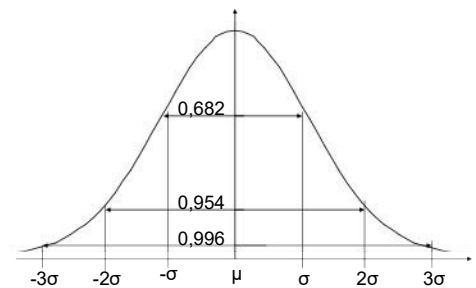
Figur 1.16

Figur 1.17 gir oss en grei oversikt over sannsynligheten (P) for å ligge i et intervall lik middelværdi pluss/minus et antall standardavvik.

P når $x \in (\mu \pm \sigma) = 0,682$

P når $x \in (\mu \pm 2\sigma) = 0,954$

P når $x \in (\mu \pm 3\sigma) = 0,996$



Figur 1.17

Eksempel 1.1

Flytegrensen til et parti prøvestaver er normalfordelt $N(500 \text{ MPa}, 30 \text{ MPa})$.

- a) Bestem den største spenningen en prøvestav kan utsettes for dersom sannsynligheten for flyting ikke skal overstige 5 %.

$$u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{x - 500}{30}$$

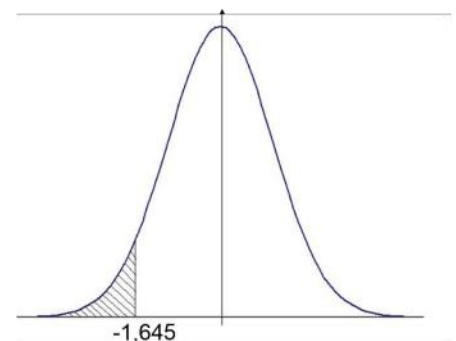
Fra tabellen i kap. 1.3.8 har vi at likningen er oppfylt

om $u = -1,645$ (ligger mellom $-1,64$ og $-1,65$)

For å finne verdien av x , altså hva flytegrensen må være, benytter vi formelen:

$$-1,645 = \frac{x - 500}{30} \Rightarrow x = -1,645 \cdot 30 + 500 = 451 \text{ MPa}$$

Denne verdien benyttes også i Eurokode 3 (stålstandarden). I Eurokode 3 blir denne flytegrensen benevnt *den karakteristiske verdi av flytegrensen*.



Figur 1.18