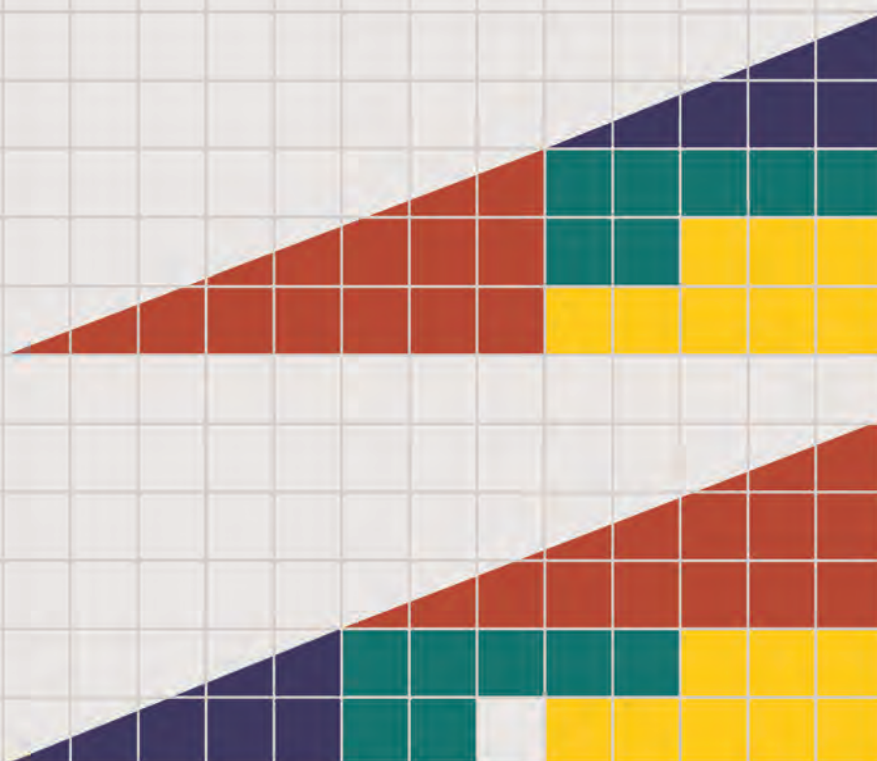


INNFORING I MATEMATIKK FOR ØKONOMISTUDENTER

Kristina Rognlien Dahl
Robert G. Hansen



FAGBOKFORLAGET

Innføring i matematikk

for økonomistudenter

Innføring i matematikk

for økonomistudenter

Kristina Rognlien Dahl og Robert G. Hansen



FAGBOKFORLAGET

Copyright © 2025 by
Vigmostad & Bjørke AS
All Rights Reserved

ISBN: 978-82-450-5899-4

1. utgave, 1. versjon 2025

E-utgaven er basert på 1. trykte utgave, 1. opplag: ISBN: 978-82-450-5026-4

Elektronisk tilrettelegging: Merkur grafisk AS (Vegard Brekke)

Forsidedesign ved forlaget

Illustrasjon på s. 81: © AtlasbyAtlas Studio / shutterstock

Deler av manuset i noen kapitler er første gang publisert
i *Matematikk for økonomer*, Studieguiden, utgitt av BI Executive,
2022 og *Mikroøkonomi*, Studieguiden, utgitt av BI Executive, 2023.

Spørsmål om denne boken kan rettes til:

Fagbokforlaget

Kanalveien 51

5068 Bergen

Tlf.: 55 38 88 00

e-post: fagbokforlaget@fagbokforlaget.no

www.fagbokforlaget.no

Materialet er vernet etter åndsverkloven.

Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarframstilling

bare tillatt når det er hjemlet i lov eller avtale med Kopinor.

Vigmostad & Bjørke AS er Miljøfyrtårn-sertifisert



Dedikasjoner

Takk til mamma som sa at jeg måtte lese ting tre ganger til om jeg prøvde å sluntre unna. Takk til pappa som stilte opp med grublerier og cola uten sukker. Takk til Eirik for evig tro på alt, inkludert meg. Takk til farmor som faktisk var den skarpeste kniven i skuffen. Og mest av alt: Takk til Ylva og Vetle for å være lyset i livet mitt.

Kristina

«I read a book one day and my whole life was changed.»

Orhan Pamuk

Takk til mamma som lærte meg å gjøre mitt beste, til pappa som lærte meg utholdenhet, og til Rita som lærte meg om livets uransakelige underfundighet. Takk til Ba, Knut og Pål som vekket min nysgjerrighet, og som med sin raushet, godhet og medmenneskelighet har gitt meg noe å strekke meg etter.

Takk til Agnethe og Maren, for å gi livet lys, glede og håp, og for å få meg til å forstå hva som virkelig er viktig (selv om jeg er tunglært). Takk til Tale, for din tålmodige kjærlighet, herfra til månen og tebakars.

Robert

«All you need is love.»

John Lennon

Forord og bruksanvisning

I denne boka gjennomgår vi de viktigste matematiske verktøyene du trenger i et bachelorstudium i økonomisk-administrative fag. Vi har bestrebet oss på å gjøre gjennomgangen så klar, enkel og avmystifiserende som mulig. Samtidig forsøker vi å vise hvordan det matematiske analyseapparatet kan brukes til å løse en rekke økonomiske problemstillinger.

Hvordan bør du bruke boka? Her er et forslag til bruksanvisning og en leseveiledning:

Første del av boka dekker alle relevante tema fra obligatorisk skolegang. Stoffet er skrevet spesielt for de som har valgt minstekravet i matematikk på videregående skole, eller som har behov for repetisjon.

Andre del av boka tar for seg typiske hovedtemaer i innføringskurs i matematikk for økonomistudenter.

Boka er basert på studentaktiv lesing. Strukturen følger følgende prinsipper:

- Bittelitt teori.
- Et konkret eksempel for å vise denne lille biten teori.
- En oppgave av samme form som det konkrete eksempelet.

Jobb aktivt med eksempler og oppgaver, gjerne først med hjelp av løsningsforslagene i boka. Deretter gjør du de samme eksemplene og oppgavene på nytt, helt til du er sikker på at du kan løse oppgavene uten å se på fasiten. Legg vekk mobilen og datamaskinen så mye som mulig. La hjernen din få tid og rom til å lage koblinger.

Stopp opp underveis og tenk etter hva temaet du holder på med egentlig handler om: Reflekter, drole, filosofer og ha det litt gøy med ideene og den tankeverdenen som åpner seg.

Takk

Vi vil takke Andreas Nybø i Fagbokforlaget, som har vært en entusiastisk og engasjerende redaktør for denne boka. Hans evige optimisme og mange gode ideer har vært til stor hjelp og inspirasjon under arbeidet. Vi har satt stor pris på hans aldri sviktende tro på prosjektet. Det er akkurat en slik redaktør alle forfattere ønsker seg.

En stor takk går til Vegard Brekke for ypperlig hjelp med typesetting og figurtegning, Bodil Kjenstad for pertentlig språkkorrektur og produksjonskoordinator Laura Giminska for generell stållkontroll.

Forlegger Arno Vigmostad, med alle gode medarbeidere i Fagbokforlaget, har på aller beste vis støttet prosjektet slik at denne boka ble skrevet. Med hans hjelp fikk vi utløp for mange års skrivekløe. Og kanskje kommer det en spennende fortsettelse.

Takk til gode kollegaer ved Handelshøyskolen BI for å bidra til et godt sted for matematikkundervisning og et fantastisk fint fagfellesskap.

Og ikke minst: Takk til alle studentene våre som har inspirert oss til å skrive denne boka. Vi håper den vil føles som en god hjelp.

Oslo og Iguazu Falls, april 2025

Kristina Rognlien Dahl og Robert G. Hansen



Å skrive bok er hardt arbeid, men det går lettere om man samarbeider og hvis man har smågodt. Slik er det også med å studere. Vi anbefaler derfor å jobbe sammen i grupper. Og å bruke smågodt som belønning.

Innhold

Dedikasjoner	5
Forord og bruksanvisning	7
 DEL 1	
GRUNNLEGGENDE MATEMATIKK	15
 KAPITTEL 1	
Grafer	17
1.1 Tallinja	18
1.2 Koordinatsystemet	19
1.3 Tabeller	25
1.4 Å lese av en graf	28
1.5 Flere grafer i samme koordinatsystem	30
1.6 Oppsummerende oppgaver til kapittel 1	32
 KAPITTEL 2	
Tallsystemet. Symboler og begrepsbruk	33
2.1 Tallsystemet	34
2.2 Symboler og begrepsbruk	37
2.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 2	38
 KAPITTEL 3	
Algebraiske uttrykk og faktorisering (parentesregning)	39
3.1 Algebraiske uttrykk	40
3.2 Regneregler for reelle tall	41
3.3 Faktorisering	44
3.4 Regnerekkefølge	46
3.5 Oppsummerende oppgaver til kapittel 3	46
 KAPITTEL 4	
Brøkregning	47
4.1 Brøkregning	48
4.2 Faktor og ledd	54
4.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 4	56

KAPITTEL 5	
Potenser og røtter. Kvadratsetningene	57
5.1 Definisjoner og regneregler	58
5.2 Kvadratsetningene	63
5.3 Kvadratrøtter	65
5.4 Mer generelle rotuttrykk	68
5.5 Oppsummerende oppgaver til kapittel 5	69
KAPITTEL 6	
Prosentregning og renter	71
6.1 Prosent	72
6.2 Renteregning	73
6.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 6	76
KAPITTEL 7	
Likninger, lineære likninger og lineære likningssystemer	79
7.1 Likninger	80
7.2 Lineære likninger	82
7.3 Én lineær likning med én ukjent	83
7.4 Lineære likningssystemer	87
7.4.1 To lineære likninger med to ukjente	88
7.4.2 Tre lineære likninger med tre ukjente	90
7.5 Oppsummerende oppgaver til kapittel 7	92
KAPITTEL 8	
Annengradslikningen. Rasjonale og irrasjonale likninger	97
8.1 Annengradslikningen	98
8.2 Faktorisering av annengradsuttrykk	105
8.3 Rasjonale likninger	108
8.4 Irrasjonale likninger	110
8.5 Oppsummerende oppgaver til kapittel 8	112
KAPITTEL 9	
Ulikheter	113
9.1 Ulikhetstegnet	114
9.2 Grafisk framstilling av ulikheter	117
9.3 Lineære ulikheter	119
9.4 Ikke-lineære ulikheter og fortegnsskjemaer	123
9.5 Oppsummerende oppgaver til kapittel 9	130
KAPITTEL 10	
Funksjoner av en variabel. Den lineære funksjonen	133
10.1 Funksjonsbegrepet	134
10.2 Grafen til en funksjon	137
10.3 Den lineære funksjonen	141
10.4 Ett- og topunktsformlene	144
10.5 Oppsummerende oppgaver til kapittel 10	150

KAPITTEL 11

Kvadratiske funksjoner.....	153
11.1 Annengradsfunksjoner.....	154
11.2 Økonomisk anvendelse: Maksimer overskuddet.....	157
11.2.1 Eksempeloppgave: Økonomisk anvendelse.....	158
11.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 11.....	160

KAPITTEL 12

Polynomfunksjoner og polynomdivisjon. Potensfunksjoner.....	163
12.1 Polynomer.....	164
12.2 Polynomdivisjon.....	167
12.3 Potensfunksjoner.....	172
12.4 Oppsummerende oppgaver til kapittel 12.....	175

DEL 2

MATEMATIKK FOR ØKONOMIFAG.....	177
--------------------------------	-----

KAPITTEL 13

Bruk av matematikk i økonomi.....	179
13.1 Hvorfor bruke matematikk for å lære økonomi?.....	180
13.2 Formler og grafer.....	181
13.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 13.....	188

KAPITTEL 14

Matematiske formler som modeller for virkeligheten.....	191
14.1 Bruk matematikk for å forstå verden.....	192
14.2 Kvantifisering via formler.....	195
14.3 Modeller er ikke virkeligheten.....	197
14.4 Oppsummerende oppgaver til kapittel 14.....	199

KAPITTEL 15

Mer grafer.....	201
15.1 Skjæring med aksene.....	202
15.2 Positiv og negativ.....	204
15.3 Større enn eller mindre enn et tall.....	208
15.4 Forskyvninger av grafer.....	209
15.5 Ulike typer grafer.....	212
15.5.1 Lineær.....	212
15.5.2 Kvadratisk.....	215
15.5.3 Polynomer.....	219
15.5.4 Andre grafer.....	220
15.6 Løse likninger og ulikheter mellom to funksjoner grafisk.....	221
15.7 Oppsummerende oppgaver til kapittel 15.....	223

KAPITTEL 16	
Grenser, rasjonale funksjoner og asymptoter.....	227
16.1 Grenser og kontinuitet.....	228
16.1.1 Rasjonale funksjoner.....	231
16.2 Asymptoter.....	235
16.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 16.....	240
KAPITTEL 17	
Inntekter, kostnader og profitt.....	243
17.1 Inntektsfunksjonen.....	244
17.2 Kostnadsfunksjonen.....	246
17.3 Profittfunksjonen.....	249
17.4 Oppsummerende oppgaver til kapittel 17.....	251
KAPITTEL 18	
Derivasjon av funksjoner i én variabel.....	253
18.1 Fortegnet til den derivate.....	256
18.2 Derivasjonsregler.....	260
18.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 18.....	271
KAPITTEL 19	
Elastisiteter.....	275
19.1 Elastisiteten til en funksjon av en variabel.....	276
19.2 Priselastisiteten.....	278
19.3 Grafisk framstilling.....	284
19.4 Inntektselastisiteten.....	287
19.5 Krysspriselastisiteten.....	289
19.6 Oppsummerende oppgaver til kapittel 19.....	292
KAPITTEL 20	
Maksimums- og minimumspunkter.....	293
20.1 Voksende og avtakende funksjoner.....	294
20.2 Ekstrempunkter: Maksimum- og minimumspunkter.....	300
20.3 Konvekse og konkave funksjoner.....	306
20.4 Oppsummerende oppgaver til kapittel 20.....	311
KAPITTEL 21	
Økonomiske anvendelser.....	313
21.1 Produksjon og kostnader.....	314
21.2 Profittmaksimering uten markedsrett: Frikonkurranse.....	320
21.3 Profittmaksimering med markedsrett: Monopol.....	327
21.4 Oppsummerende oppgaver til kapittel 21.....	331
KAPITTEL 22	
Ekspensial- og logaritmefunksjoner.....	333
22.1 Ekspensialfunksjoner.....	335
22.2 Logaritmer og logaritmefunksjoner.....	338
22.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 22.....	343

KAPITTEL 23

Rekker og finansmatematikk	345
23.1 Nåverdier og sluttverdier	346
23.2 Geometriske rekker og betalingsrekker	351
23.3 Annuitetslån og serielån	361
23.4 Oppsummerende oppgaver til kapittel 23	366

KAPITTEL 24

Funksjoner i to variabler og partiellderivasjon	369
24.1 Funksjoner i to variabler	370
24.2 Grafisk framstilling av funksjoner i to variabler	371
24.3 Partiellderivasjon	375
24.4 Annenordens partiellderiverte	379
24.5 Oppsummerende oppgaver til kapittel 24	380

KAPITTEL 25

Maksimum og minimum til funksjoner av to variabler	383
25.1 Stasjonærpunkter	384
25.2 Lokale ekstrepunkter	388
25.3 Globale ekstrepunkter	398
25.4 Oppsummerende oppgaver til kapittel 25	405

KAPITTEL 26

Lagranges multiplikatormetode: Optimering av funksjoner i to variabler med bibetingelse	407
26.1 Lagranges multiplikatormetode	408
26.2 Sammensatte problemer innen optimering av funksjoner i to variabler	411
26.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 26	416

KAPITTEL 27

Integrasjon	419
27.1 Det ubestemte integralet	420
27.2 Det bestemte integralet	423
27.3 Delvis integrasjon	430
27.4 Integrasjon ved substitusjon	433
27.5 Økonomiske eksempler	436
27.6 Oppsummerende oppgaver til kapittel 27	440

KAPITTEL 28

Lineær algebra	443
28.1 Den utvidede koeffisientmatrisen til et lineært likningssystem	444
28.2 Løsning av lineære likningssystemer: Gauss-Jordans eliminasjonsmetode	449
28.3 Oppsummerende oppgaver til kapittel 28	452

FASIT OG STIKKORD	453
Fasit	454
Fasit kapittel 1.....	454
Fasit kapittel 2.....	458
Fasit kapittel 3.....	459
Fasit kapittel 4.....	461
Fasit kapittel 5.....	464
Fasit kapittel 6.....	468
Fasit kapittel 7.....	472
Fasit kapittel 8.....	479
Fasit kapittel 9.....	486
Fasit kapittel 10	488
Fasit kapittel 11	492
Fasit kapittel 12	495
Fasit kapittel 13	499
Fasit kapittel 14	500
Fasit kapittel 15	503
Fasit kapittel 16	508
Fasit kapittel 17	511
Fasit kapittel 18	516
Fasit kapittel 19	520
Fasit kapittel 20	522
Fasit kapittel 21	525
Fasit kapittel 22	533
Fasit kapittel 23	536
Fasit kapittel 24	540
Fasit kapittel 25	544
Fasit kapittel 26	550
Fasit kapittel 27	552
Fasit kapittel 28	557
Stikkord	558

DEL 1

Grunnleggende matematikk

KAPITTEL 1

Grafer

I dette kapitlet skal vi snakke om en del av matematikken man ofte møter både i dagliglivet og arbeidslivet: grafer. Når du ser nyheter, møter du ulike grafer hele tiden. Grafer brukes for å vise avhengighet mellom to ulike størrelser. For eksempel kan du møte på grafer som viser utviklingen over tid av brutto nasjonalprodukt, rentebanen, fruktbarhetstall eller oppslutning for ulike partier ved stortingsvalg. Grunnlaget for alle grafer er det som kalles et *koordinatsystem*, og dette er igjen bygd opp av de såkalte *aksene*. Disse aksene er egentlig tallinjer, så for å forstå grafer, må vi først forstå tallinja.

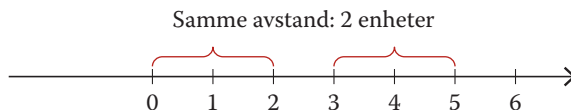
1.1 Tallinja

Stort sett alt vi omgir oss med, er *endelig*: endelig mange mennesker i verden, endelig mange liter olje på jorda og endelig mange ressurser. Denne endeligheten gjelder derimot ikke for tall: Det finnes uendelig mange tall. I neste kapittel skal vi snakke nærmere om tallsystemet og ulike kategorier av tall, men for nå nøyer vi oss med å huske på at vi har uendelig mange tall. Disse tallene kan vi framstille grafisk, altså med en figur, ved å tegne den såkalte *tallinja*. I figur 1.1 ser du denne tallinja. Vi kan tenke oss at hvert tall representeres med en liten prikk på arket. Beveger vi oss mot høyre, får vi større tall, beveger vi oss mot venstre, får vi mindre tall. For eksempel er prikken for tallet 5 til høyre for prikken for tallet 3.



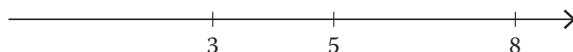
Figur 1.1 Tallinja.

Tallinja fungerer som en linjal. Derfor, hvis man tegner presist, skal avstanden mellom tallene være lik. For eksempel vil avstanden mellom 5-prikken og 3-prikken være to enheter. Dette er det samme som avstanden mellom 2-prikken og 0-prikken. Dette er vist i figur 1.2.



Figur 1.2 Tallinja med avstander markert.

Den sammenhengende tallinje-streken illustrerer at det finnes uendelig mange tall, for hvis man skal tegne en sammenhengende strek, må man tegne uendelig mange prikker. Siden det finnes uendelig mange tall, har vi ikke plass på arket til å faktisk skrive opp alle tallene. Derfor er det vanlig kun å markere de tallene man har behov for i den aktuelle situasjonen på tallinja. Er vi f.eks. interessert i tallene 3, 5 og 8, så markerer vi kun dem. Se figur 1.3.



Figur 1.3 Tallinja med kun de relevante punktene, her 3, 5 og 8, markert.

Tallinja tegnes vanligvis med en pil som peker bortover i høyre ende. Dette er for å markere at selv om linja visuelt stopper, så tenker vi oss at den fortsetter uendelig langt bortover: Arket er bare ikke stort nok. Selv om det ikke tegnes en pil i venstre ende, så tenker vi at tallinja fortsetter i det uendelige i denne retningen også.

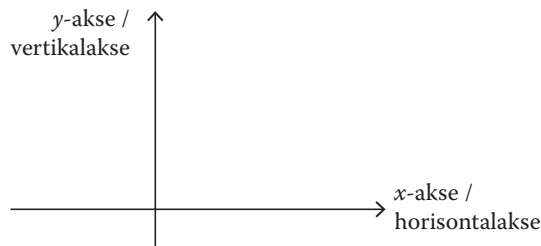
Oppgave 1.1 Tegn ei tallinje og marker følgende tall:

- a) 0 b) 6 c) -3 d) $\frac{1}{2}$ e) $-2,8$

Ofte er vi ikke bare interessert i ett tall, men å vise avhengigheten mellom *to* ulike størrelser. For eksempel kan vi se på tid og folketall: Hvor mange mennesker var det i Norge i år 1947? Og i 1984? Og i 2021? osv. Da strekker ikke tallinja til. Det vi egentlig trenger, er ei tallinje for tiden og ei tallinje for folketallet. Altså trenger vi faktisk *to* tallinjer. Disse to tallinjene setter vi slik at de danner et rett kryss. Det vi da ender opp med, er *koordinatsystemet*.

1.2 Koordinatsystemet

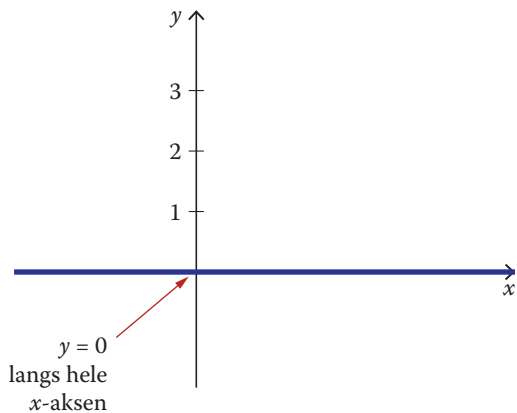
Koordinatsystemet brukes for å vise fram to ulike størrelser på en gang. La oss kalle disse størrelsene x og y . Vi lager ei tallinje for x og ei tallinje for y og setter de i et rett kryss for å danne et koordinatsystem. Disse to tallinjene kalles *aksene*. Den vannrette aksen kalles *horisontalaksen*, mens den loddrette aksen kalles *vertikalaksen*. Ofte sier man også x -aksen og y -aksen.¹ Dette kan du se illustrert i figur 1.4.



Figur 1.4 Koordinatsystemet.

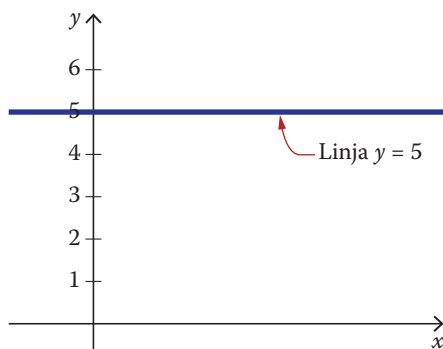
¹ Akkurat ordene x -akse og y -akse er litt upresise i de tilfellene aksebenevningene ikke heter x og y , men f.eks. «tid» og «folketall». Horisontal- og vertikalakse er derimot alltid riktig.

Legg merke til at $y = 0$ langs hele x -aksen, se figur 1.5.



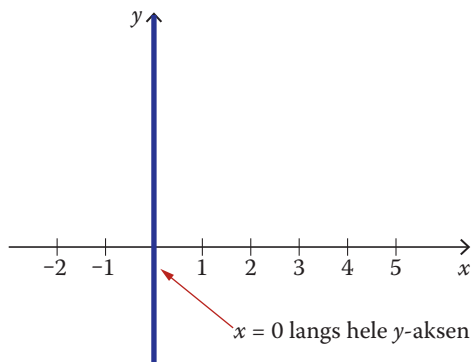
Figur 1.5 $y = 0$ langs hele x -aksen.

Faktisk er det slik at dersom vi lager en horisontal linje gjennom et punkt på y -aksen, f.eks. gjennom $y = 5$, så vil y være konstant lik 5 på hele denne horisontale linja. Se figur 1.6.



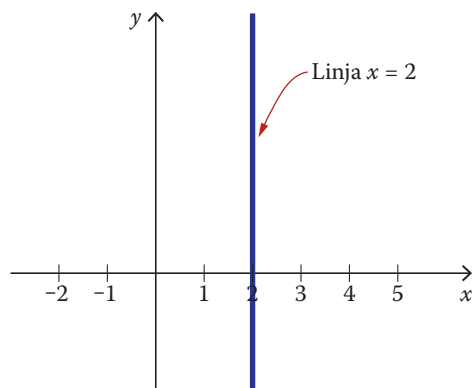
Figur 1.6 Den horisontale linja $y = 5$.

Tilsvarende er $x = 0$ langs hele y -aksen, se figur 1.7.



Figur 1.7 $x = 0$ langs y -aksen.

Dersom vi lager en vertikal linje gjennom et punkt på x -aksen, f.eks. gjennom $x = 2$, så vil x være konstant lik 2 på hele denne vertikale linja. Se figur 1.8.



Figur 1.8 Den vertikale linja $x = 2$.

Oppgave 1.2 Lag et koordinatsystem. I det samme koordinatsystemet tegn inn rette linjer der følgende er oppfylt:

- a) $x = -1$ b) $x = 4$
 c) $y = 5$ d) $y = -3$

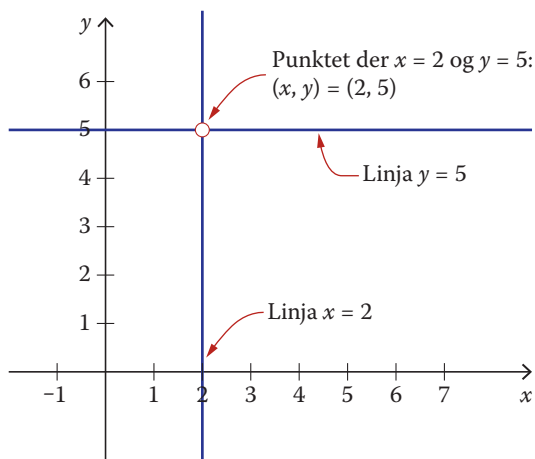
Fra figuren din: Greier du å finne et punkt der $x = -1$ og $y = 5$? Hva med et punkt der $x = 4$ og $y = -3$?

Vi kan tegne ulike kombinasjoner av x og y inn i koordinatsystemet. Hvis f.eks. $x = 2$ og $y = 5$, så skriver vi dette *punktet* eller *koordinatet* som

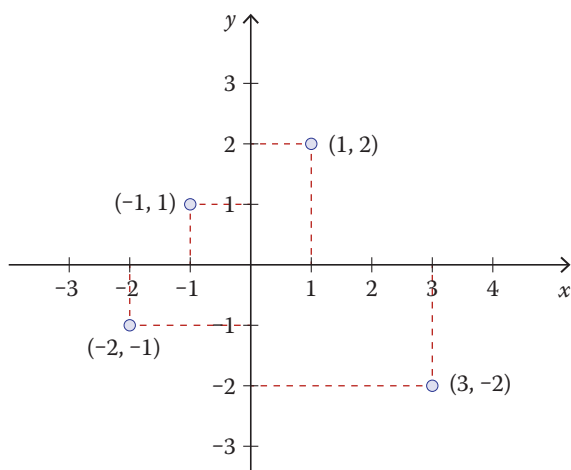
$$(x, y) = (2, 5).$$

For å tegne dette punktet i koordinatsystemet finner vi først stedet på x -aksen der $x = 2$. Så lenge vi beveger oss loddrett opp eller ned fra dette stedet, vil x være 2, som vist i figur 1.8. Deretter finner vi stedet på y -aksen der $y = 5$. Så lenge vi beveger oss vannrett fra dette stedet, vil y være 5, som vist i figur 1.6. Hvis vi tegner både den loddrette og den vannrette linja i samme koordinatsystem, finner vi at de to linjene krysser i et punkt. I dette punktet må både $x = 2$ og $y = 5$, for punktet ligger både på linja der x er 2, og på linja der $y = 5$, se figur 1.9.

Punktet vi nå har funnet, oppfyller derfor at $x = 2$ og $y = 5$. Dermed har vi nå tegnet inn punktet $(2, 5)$. Tilsvarende kan man gjøre for å tegne alle andre punkter inn i et koordinatsystem. I figur 1.10 ser du flere ulike punkter tegnet inn. Når du ser på figuren, sjekk for hvert enkelt punkt at du forstår hvorfor det er tegnet inn akkurat der det er.



Figur 1.9 Punkt der $x = 2$ og $y = 5$, dvs. $(x, y) = (2, 5)$.



Figur 1.10 Ulike punkter i koordinatsystemet.

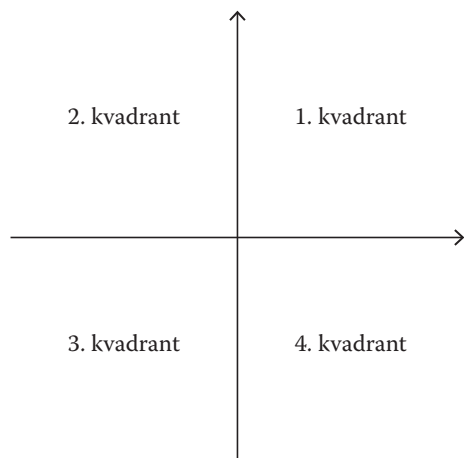
Oppgave 1.3 Lag et koordinatsystem, og tegn inn følgende punkter:

- a) $(x, y) = (4, 5)$ b) $(x, y) = (-1, -3)$
 c) $(x, y) = \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$ d) $(x, y) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

Ett punkt som skiller seg ut i koordinatsystemet, er selve krysningspunktet mellom horisontalaksen og vertikalaksen. Dette punktet kalles *origo*. Origo har koordinater $(x, y) = (0, 0)$, altså er både x og y lik 0 i akkurat dette punktet.

Oppgave 1.4 Bruk tallinjene i koordinatsystemet til å forklare hvorfor $x = 0$ og $y = 0$ i nettopp origo.

Hvis vi ser nærmere på eksemplene og oppgaven over, ser vi at det er en sammenheng mellom plasseringen til punktene i koordinatsystemet og fortegnene til x - og y -koordinatene. Faktisk ser vi at koordinatsystemet består av fire ulike deler. Disse delene kalles *kvadranter*: 1. kvadrant, 2. kvadrant, 3. kvadrant og 4. kvadrant. Se figur 1.11.



Figur 1.11 Kvadrantene.

Hvis vi ser på figur 1.10, ser vi at fortegnene på x - og y -koordinatene varierer avhengig av hvilken kvadrant vi befinner oss i. I 1. kvadrant er både x og y positive. I 2. kvadrant er x negativ, mens y er positiv. I 3. kvadrant er både x og y negative, mens i 4. kvadrant er x positiv og y negativ. På denne måten kan vi se plasseringen til et punkt direkte fra fortegnene til x - og y -koordinatene. For eksempel vil punktet $(3, -4)$ ligge i 4. kvadrant fordi x er positiv og y er negativ.

Oppgave 1.5 I hvilken kvadrant ligger følgende punkter? Tegn punktene inn i et koordinatsystem for å sjekke.

- a) $(2, 2)$ b) $(-5, 8)$ c) $(-9, -1)$ d) $(4, -2)$

Når vi nå har en god forståelse for koordinatsystemet og hvordan det kan brukes til å tegne punkter, kan vi bruke dette til å vise fram informasjon fra en tabell grafisk. La oss si at vi har følgende tabell med årstall og tilhørende folketall i Norge:

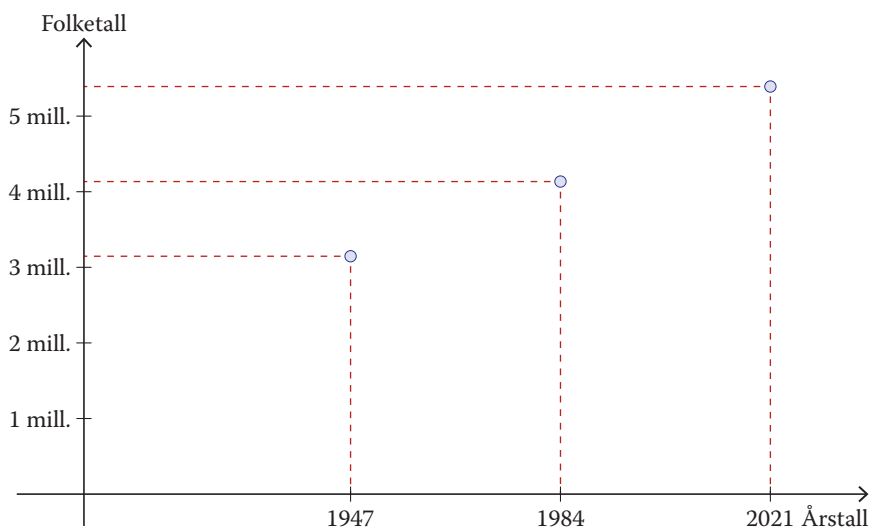
Årstall	Folketall
1947	3 146 497
1984	4 134 353
2021	5 391 369

Denne informasjonen kan vi nå framstille grafisk i koordinatsystemet vårt. På punktform blir informasjonen i tabellen som følger:

$(1947, 3\,146\,497)$, $(1984, 4\,134\,353)$, $(2021, 5\,391\,369)$.

Vi må tegne disse punktene inn i et koordinatsystem med aksebenevninger, hhv. «tid» på horisontalaksen og «folketall» på vertikalaksen. Grunnen til at vi velger å ha tid, ikke folketall, på horisontalaksen, er at denne akse typisk brukes til den uavhengige variabelen (input-variabelen). Vertikalaksen brukes til den avhengige variabelen (output-variabelen). I dette eksempelet er det slik at folketallet avhenger av tiden, dermed er folketallet den avhengige variabelen.²

Siden størrelsen på tallene på folketallaksen er så stor sammenlignet med størrelsen på tallene på tidsaksen, må vi bruke ulik skala på de to aksene. Dette er ikke noe problem og veldig vanlig i praktiske problemer. I figur 1.12 er punktene fra tabellen markert inn.



Figur 1.12 Folketallspunktene tegnet inn i koordinatsystemet. Tid på horisontalaksen. Folketall på vertikalaksen.

² Alternativet ville være at tiden avhenger av folketallet, som ikke stemmer.

1.3 Tabeller

Mye informasjon vi er interessert i, kommer i form av tabeller. En tabell kan være i ulike formater, men her skal vi fokusere på tabeller som består av to kolonner. Hos Statistisk sentralbyrå (SSB) finnes det tusentalls av tabeller på nettopp denne formen. I figur 1.13 ser du et utsnitt av en tabell som viser den historiske utviklingen av folketallet i Norge:

1766	722 269
1767	726 856
1768	733 160
1769	739 180
1770	745 183
1771	750 811
1772	753 835
1773	744 813
1774	736 347
1775	740 605
1776	747 275
1777	754 040
1778	761 668
1779	767 005
1780	770 747
1781	776 842
1782	783 433

Figur 1.13 Utsnitt av tabell fra SSB som viser utviklingen av folketallet i Norge. Årstall i venstre kolonne, folketall i høyre.

Kilde: SSB, CC BY 4.0, <https://www.ssb.no/befolkning/faktaside/befolkningen>

I figur 1.13 viser første kolonne året og andre kolonne folketallet det tilhørende året. For eksempel var folketallet i 1766 på 722 269 personer, mens folketallet i 1777 var på 754 040 personer. Tabellen viser altså hvordan folketallet avhenger av året.

Oppgave 1.6 Bruk tabellutsnittet i figur 1.13 til å svare på følgende spørsmål. Hva var folketallet i:

a) 1773? b) 1781?

Hvilke(t) år var folketallet:

c) 753 835? d) 767 005?

Tabellen i figur 1.13 er relativt liten og dermed er det ganske greit å tolke informasjonen. Hvis vi derimot hadde sett på den tilsvarende tabellen for utviklingen av folketallet fra 1776 til 2024, har vi plutselig 250 ulike årstall–folketall-kombinasjoner. Dette er kaotisk og vanskelig å prosessere.