前提

$|s_1\rangle := U|0\rangle$ とする。

$R_s(\theta) := U\left(I - (1 - e^{i\theta})|0\rangle\langle 0|\right)U^\dagger \quad \left(= I - (1 - e^{i\theta})|s_1\rangle\langle s_1|\right)$

$R_\omega(\theta) := I - (1 - e^{i\theta})|\omega\rangle\langle \omega|$

定理

α を正の実数(定数)、L を正の奇数(定数)とする。

$\tan\frac{\phi_n}{2} = \tanh\alpha \ \tan\frac{n}{L}\pi$ とし、

$|s_L\rangle \sim R_s(\pi+\phi_{L-1})R_w(\pi-\phi_{L-2})R_s(\pi+\phi_{L-3})R_w(\pi-\phi_{L-4})\cdots\cdots R_s(\pi+\phi_2)R_w(\pi-\phi_1)\ |s_1\rangle$ とする。

$p_1 = |\langle w|s_1\rangle|^2$, $p_L = |\langle w|s_L\rangle|^2$ とし、

$\eta_1 = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{p_1}}{1-\sqrt{p_1}}$, $\eta_L = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{p_L}}{1-\sqrt{p_L}}$ とおくと、 $\left(\tanh\eta_1 = \sqrt{p_1}\ ,\ \tanh\eta_L = \sqrt{p_L}\right)$

「$\eta_1 \geqq \alpha \Rightarrow \eta_L \geqq L\alpha$」が成り立つ。

今回のEx問題への適用

$p_1 \geq 0.02$ のとき、$p_L \geq 0.99$ にしなければいけない。

「$\eta_1 \geq 0.142$ のとき、$\eta_L \geq 3$」が成り立つようにLを選ぶ。

$L=23$、$\alpha=0.142$ として、定理のアルゴリズムを実装すればOK.

R_ωの使用回数は11回ですね。

証明 ①

$x = \sqrt{1-p_1}$ とする.

$|s_1\rangle = x|r\rangle + \sqrt{1-x^2}\,|w\rangle$, が成り立つような $|r\rangle$ をとる。 $\left(\begin{array}{l} x \neq 0 \text{ なら, } |r\rangle = \frac{1}{x}|s_1\rangle - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}|w\rangle \text{ とすればよい.} \\ x = 0 \text{ なら, } \begin{cases} \langle w|r\rangle = 0 \\ \langle r|r\rangle = 1 \end{cases} \text{ となる } |r\rangle \text{ をてきとうに選ぶ.} \end{array} \right)$

$\langle w|r\rangle = 0$, $\langle r|r\rangle = 1$

以下の議論において、$|r\rangle$ と $|w\rangle$ によって張られる線型空間に属さない元に対し、

$R_s(\theta)$ や $R_w(\theta)$ を作用させることは無い。

よって, $|r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|w\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし, $|r\rangle$ とも $|w\rangle$ とも垂直なベクトルは考えない.

$|s_1\rangle = \begin{pmatrix} x & +\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix} |r\rangle$ に注意して計算する

$$-e^{-i\phi_2} R_{s_1}(\pi+\phi_2) R_w(\pi-\phi_1)$$

$$= -e^{-i\phi_2}\left(I-(1+e^{i\phi_2})|s_1\rangle\langle s_1|\right)\left(I-(1+e^{-i\phi_1})|w\rangle\langle w|\right)$$

$$= -e^{-i\phi_2}\begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}\left(I-(1+e^{i\phi_2})|r\rangle\langle r|\right)\begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}\left(I-(1+e^{-i\phi_1})|w\rangle\langle w|\right)$$

$$= -e^{-i\phi_2}\begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{i\phi_2} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -e^{-i\phi_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{-i\phi_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{-i\phi_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{-i\phi_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{-i\phi_1} \end{pmatrix}$$

よって、

$$|s_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_{n+1}\rangle = \begin{pmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{-i\phi_n} \end{pmatrix}|s_n\rangle$$

としてよいことがわかる。

余談

ブロッホ球の $|r\rangle$ を $|0\rangle$, $|\omega\rangle$ を $|1\rangle$ に対応させると、

このアルゴリズムは始めのベクトル $|s_0\rangle = |r\rangle$ として、

「Z軸に $-\phi_n$ 回転し、Y軸に θ 回転する」を、L回繰り返すということである。 $(\cos\theta = x)$

$\phi_n = 0$ とすると、グローバーのアルゴリズムになり

$L=3$, $\phi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\phi_2 = \frac{2\pi}{3}$ とすると、$\frac{\pi}{3}$ phase shift法になる.

$|s_n\rangle = a_n(x)\,|r\rangle + \sqrt{1-x^2}\,b_n(x)\,|w\rangle$ とする.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ \sqrt{1-x^2}\,b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -e^{i\phi_n}\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & e^{i\phi_n}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ \sqrt{1-x^2}\,b_n \end{pmatrix}$$

よって、
$$\begin{cases} a_{n+1} = x\,a_n - e^{i\phi_n}(1-x^2)\,b_n \\ b_{n+1} = a_n + e^{i\phi_n}x\,b_n \end{cases}$$

計算すると、

$$a_{n+1} = (1+e^{i\phi_n})x\,a_n - e^{i\phi_n}a_{n-1}$$

がわかる。

$t_n := \tan\frac{\phi_n}{2}$ とすると、

$$a_{n+1} = \frac{2x}{1+it_n}a_n - \frac{1-it_n}{1+it_n}a_{n-1}$$

$D_n := \prod_{0\le k<n}(1+it_k)$, $N_n := D_n a_n$ とすると、

$(1+it_n)(1+it_{n-1}) = 2(1+it_n) + i(1+it_n)i(1-it_{n-1})$ より、

$D_{n+1} = 2D_n + i(1-it_n)i(1+it_{n-1})D_{n-1}$, $D_0 = 1$, $D_1 = 1$

また、a_nの漸化式に $a_n = \frac{a_n}{D_n}$ を代入して、

$N_{n+1} = 2xN_n + i(1-it_n)i(1+it_{n-1})N_{n-1}$, $N_0 = 1$, $N_1 = x$

$r := \frac{1}{\cosh\alpha}$ とする。

$S_n(x) = r^n T_n\left(\frac{x}{r}\right)$ とする。T_nはチェビシェフ多項式.

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ より、

$S_{n+1}(x) = 2xS_n(x) - r^2 S_{n-1}(x)$, $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$

$y := \tanh\alpha$ とおくと、($t_n = y\tan\frac{n\pi}{L}$, $r^2 = 1-y^2$ が成り立つ.)

$N_{n+1} = 2xN_n + i\left(1-y\cdot i\tan\frac{n}{L}\pi\right)i\left(1+y\cdot i\tan\frac{n-1}{L}\pi\right)N_{n-1}$, $N_0 = 1$, $N_1 = x$

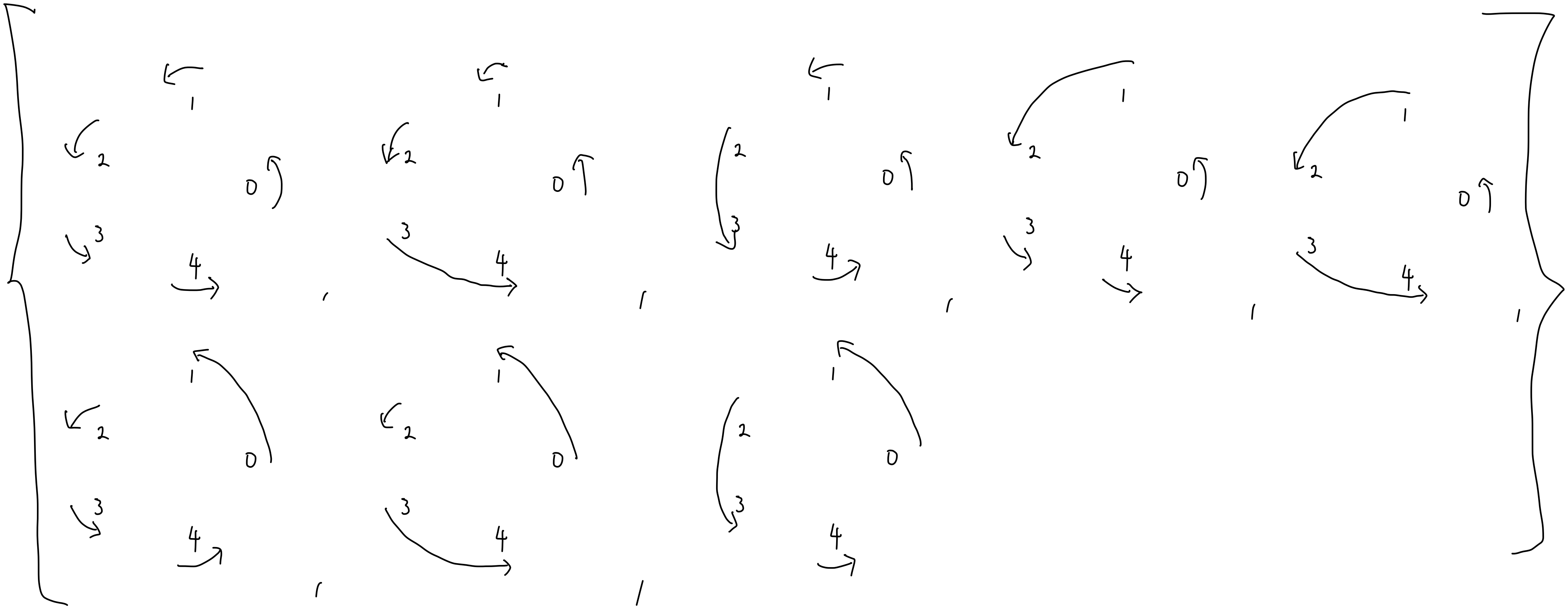
$S_{n+1}(x) = 2xS_n(x) + i(1-y)\cdot i(1+y)S_{n-1}(x)$, $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = x$

$N_L = S_L(x)$ を証明する.(ここから難)

0, 1, …, L−1 を円形に順に並べ、数字の外側に長さ1または2の矢印を配置するstateを考える。
ただし、矢印は反時計方向で、(L−1, 0)の矢印は無しとする。

例：L=5

state =



f: state $\to \mathbb{C}$ を次のように定める.

まず $\sigma \in$ state の各数字に複素数を対応させる.

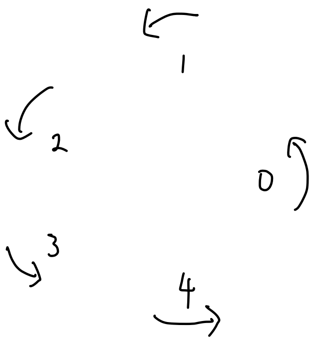
数字 k が長さ2の矢印の始点なら、$i(1+it_k)$

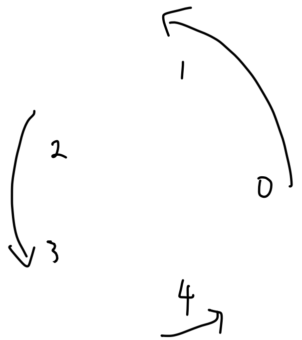
終点なら、$i(1-it_k)$

数字0が長さ1の矢印なら、x

数字 $k(\neq 0)$ が長さ1の矢印なら、$2x$

そして、各数字に対応する複素数たちの積を $f(\sigma)$ とする。

$\sigma =$  $\Rightarrow f(\sigma) = x\, 2x \cdot 2x \cdot 2x\, 2x$

$\sigma =$  $\Rightarrow f(\sigma) = i(1+it_0) \cdot i(1-it_1) \cdot i(1+it_2) \cdot i(1-it_3) \cdot 2x$

$$N_{n+1} = 2x N_n + i(1-it_n) \cdot i(1+it_{n-1}) N_{n-1} \quad , N_0 = 1 , N_1 = x$$ より、

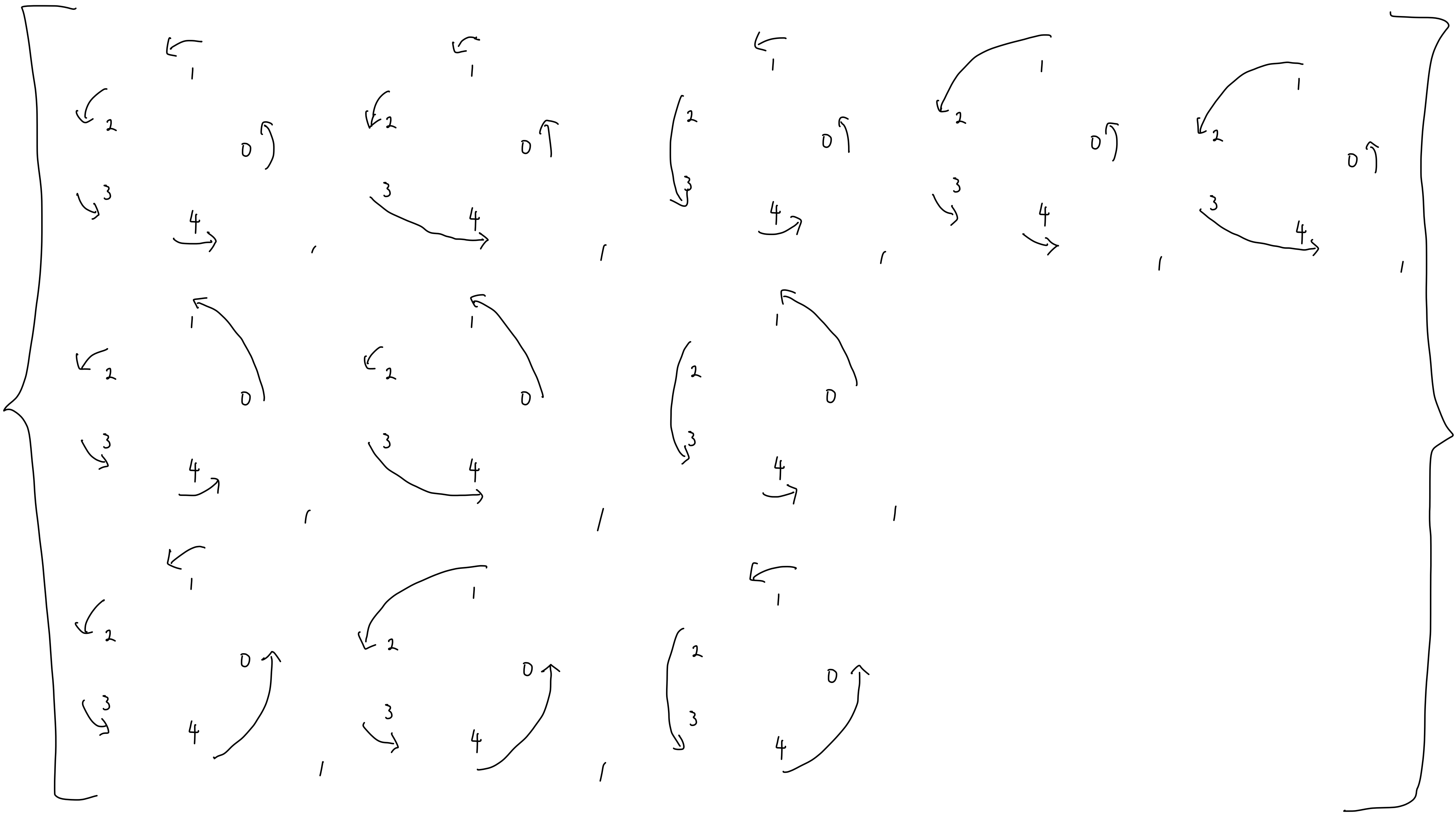
$$N_L = \sum_{\sigma \in state} f(\sigma)$$

であることがわかる。

次に、state と f を修正した $state^*$ と f^* を定義する。

$0, 1, \cdots, L-1$ を円形に順に並べ、数字の外側に長さ 1 または 2 の矢印を配置する $state^*$ を考える。
ただし、矢印は反時計方向で、$(L-1, 0)$ の矢印もありとする。

State* =



f^*: state* $\longrightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める.

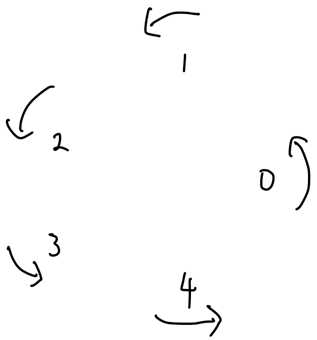
まず $\sigma \in$ state の各数字に複素数を対応させる.

数字 k が 長さ2の矢印の始点なら、$i(1+it_k)$ $\left(= i\left(1+y\cdot i\tan\frac{k\pi}{L}\right)\right)$

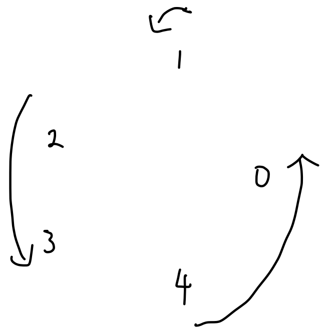
終点なら、$i(1-it_k)$ $\left(= i\left(1-y\cdot i\tan\frac{k\pi}{L}\right)\right)$

数字 k が 長さ1の矢印なら、$2x$

そして、各数字に対応する複素数たちの積を $f^*(\sigma)$ とする。

$\sigma =$ 

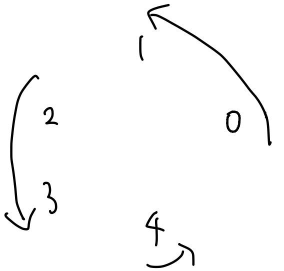
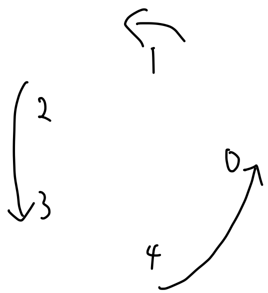
$\Rightarrow f^*(\sigma) = 2x\ 2x\cdot 2x\cdot 2x\ 2x$

$\sigma =$ 

$\Rightarrow f^*(\sigma) = i(1-it_0)\cdot 2x\cdot i(1+it_2)\cdot i(1-it_3)\cdot i(1+it_4)$

$\sigma \in \mathrm{state}$ に対し、$\bar{\sigma}$ を「σ の矢印を上下反転し、矢印を反時計回りにしたもの」とする。

例

$\sigma =$  $\Rightarrow \bar{\sigma} =$ 

$^\forall k$, $t_k + t_{L-k} = 0$ より、 $f(\bar{\sigma}) = f(\sigma)$ が成り立つ。

$$2N_L = \sum_{\sigma \in \mathrm{State}} f(\sigma) + \sum_{\sigma \in \mathrm{State}} f(\sigma)$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{State} \\ \text{0の矢印の長さが1}}} f(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{State} \\ \text{0の矢印の長さが2}}} f(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{State} \\ \text{0の矢印の長さが1}}} f(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{State} \\ \text{0の矢印の長さが2}}} f(\sigma)$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{State} \\ \text{0の矢印の長さが1}}} 2f(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{State} \\ \text{0の矢印の長さが2}}} f(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{State} \\ \text{0の矢印の長さが2}}} f(\bar{\sigma})$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{State}^*} f^*(\sigma)$$

g^*: $\mathrm{state}^* \to \mathbb{C}$ を次のように定める.

まず $\sigma \in \mathrm{state}$ の各数字に複素数を対応させる.

数字kが長さ2の矢印の始点なら、$i(1+y)$

終点なら、$i(1-y)$

数字kが長さ1の矢印なら、$2x$

さっきと同様の議論により、

$$2S_L(x) = \sum_{\sigma \in \mathrm{state}^*} g^*(\sigma)$$

であることがわかる.

補題

$[L] = \{ j \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqq j < L \}$ とする.

$V \subset [L]$ とする.

$$\sum_{j \in [L]} \prod_{v \in V} i \tan\left(\frac{v+j}{L} \pi \right) = \begin{cases} L & (|V| \text{ が偶数}) \\ 0 & (|V| \text{ が奇数}) \end{cases}$$

$|V| = 0$ のとき、 $\sum_{j \in [L]} 1 = L$ （※ $\prod_{v \in \{\}} i \tan\left(\frac{v+j}{L}\pi\right) := 1$ です）

$|V| = 1$ のとき $V = \{v_1\}$ とする.

$$\sum_{j \in [L]} i \tan\left(\frac{v_1 + j}{L} \pi \right) = \sum_{j \in [L]} i \tan\left(\frac{j}{L} \pi \right) = 0$$

$|V| \geq 2$ のとき 相異なる $v_1, v_2 \in V$ をとる. $V' = V \setminus \{v_1, v_2\}$ とする.

$$0 = \sum_{j \in [L]} i\tan(v_2 + j) \prod_{v \in V'} i\tan(v + j) - \sum_{j \in [L]} i\tan(v_1 + j) \prod_{v \in V'} i\tan(v + j)$$

$$= \sum_{j \in [L]} \left(i\tan(v_2 + j) - i\tan(v_1 + j) \right) \prod_{v \in V'} i\tan(v + j)$$

$$= \sum_{j \in [L]} i\tan(v_2 - v_1) \left(1 - i\tan(v_1 + j)\, i\tan(v_2 + j) \right) \prod_{v \in V'} i\tan(v + j)$$

$$0 = \sum_{j \in [L]} \left(1 - i\tan(v_1 + j)\, i\tan(v_2 + j) \right) \prod_{v \in V'} i\tan(v + j)$$

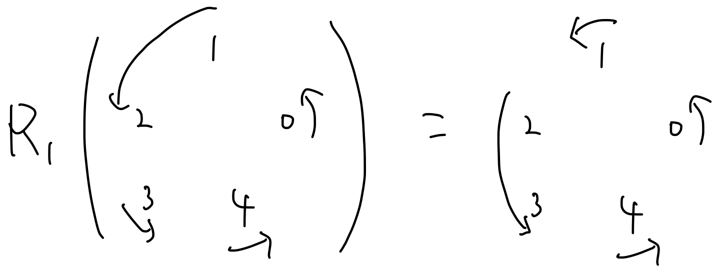
$$\sum_{j \in [L]} i\tan(v_1 + j)\, i\tan(v_2 + j) \prod_{v \in V'} i\tan(v + j) = \sum_{j \in [L]} \prod_{v \in V'} i\tan(v + j)$$

帰納法より、$\displaystyle \sum_{j \in [L]} \prod_{v \in V} i\tan(v + j) = \begin{cases} L & |V| \text{ が偶} \\ 0 & |V| \text{ が奇} \end{cases}$

証明終

$0 \le j < L$ に対し、$R_j : \mathrm{state}^* \to \mathrm{state}^*$ を、

矢印全てを j だけ反時計回りに回転させる作用とする。



補題より、

$$L \sum_{\sigma \in \mathrm{state}^*} f^*(\sigma) = \sum_{0 \le j < L} \sum_{\sigma \in \mathrm{state}^*} f^*(R_j \sigma)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{state}^*} \sum_{0 \le j < L} f^*(R_j \sigma)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{state}^*} L g^*(\sigma)$$

（$y^{\square}$ の係数に注目して補題を使う）

よって、$\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathrm{state}^*} f^*(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathrm{state}} g^*(\sigma)$

ゆえに $N_L = S_L(x)$

$$a_L = \frac{N_L}{D_L} = \frac{S_L(x)}{S_L(1)} = \frac{\gamma^L T_L\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{\gamma^L T_L\left(\frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{T_L\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{T_L\left(\frac{1}{\gamma}\right)}$$

$$\frac{1}{\cosh \eta_L} = |a_L| = \left| \frac{T_L\left(\frac{\cosh \alpha}{\cosh \eta_1}\right)}{T_L(\cosh \alpha)} \right|$$

$$\frac{\cosh L\alpha}{\cosh \eta_L} = \left| T_L\left(\frac{\cosh \alpha}{\cosh \eta_1}\right) \right|$$

$$\therefore \eta_1 \geqq \alpha \Rightarrow \eta_L \geqq L\alpha$$